

Universität Konstanz

Projektpraktikum:
SEEBECK-Effekt

durchgeführt zwischen April und Juli 2012

von Martin Keller und Marcel Thalmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	3
2.1	Magnetische Induktion und Elektromagnete	3
2.2	Das OHM'sche Gesetz als Spezialfall der BOLTZMANN'schen Transportgleichung .	6
2.3	Die Thermodiffusions- und Kontaktspannung	7
3	Vormessungen	11
3.1	Widerstand	11
3.2	B-Feld-Messung mit Hall-Sonde	11
4	Hauptmessungen	12
4.1	Versuchsaufbau und -beschreibung	12
4.1.1	Versuchsaufbau	12
4.1.2	Versuchsbeschreibung	12
4.2	Auswertung	13
4.2.1	Hysteres- und Reibungseffekte	14
4.2.2	Die Leiterschleife aus Kupfer und Konstantan	15
4.2.3	Leiterschleife aus Kupfer und Nickel-Chrom-Stahl	17
4.2.4	Leiterschleife aus Kupfer und Eisen	18
4.2.5	Fehlerbetrachtung	19
5	Quellenverzeichnis	19
6	Abbildungsverzeichnis	20
7	Anhang	20
7.1	Fehlerberechnung	20
7.2	Messwerte und berechnete Werte	21

1 Einleitung

Im Rahmen des Projektpraktikums wurde ein Thema gewählt und hierzu ein Versuchsaufbau überlegt. Die Wahl fiel schließlich auf den SEEBECK-Effekt, welcher besagt, dass bei einem Temperaturunterschied zwischen zwei Kontaktstellen von zwei unterschiedlichen Metallen eine Spannung generiert wird. Er basiert auf einer Ladungsträgerverschiebung längs des Leiters von der wärmeren zur kälteren Stelle. Durch die innere Feldstärke baut sich eine Thermospannung auf und elektrischer Strom fließt.

Im Versuchsaufbau wird ein geschlossener Leiter verwendet, in welchem sich durch den erzeugten elektrischen Strom ein Magnetfeld bildet. Mittels Messung der Magnetfeldstärke und des Temperaturunterschiedes an den zwei Kontaktstellen lässt sich der Seebeck-Koeffizient relativ zu den eingesetzten Metallen bestimmen.

Nebst einer Konstantan-Kupfer-Kombination werden die Kombinationen Chromstahl-Kupfer und Eisen-Kupfer untersucht.

Das Ziel des Versuchs ist es, die Literaturwerte für die verwendeten Metalle möglichst genau zu bestätigen.

2 Grundlagen

Da im Versuch über das Magnetfeld gemessen wird, wird zunächst auf die magnetischen Eigenschaften eingegangen. Im zweiten Teil wird der Zusammenhang zwischen der BOLTZMANN'schen Transportgleichung und dem elektrischen Widerstandes erklärt. Schließlich wird im dritten Teil auf die Entstehung einer Thermospannung in einem Thermoelement eingegangen.

2.1 Magnetische Induktion und Elektromagnete

FARADAY'sches Induktionsgesetz

Im Jahre 1831 entdeckte MICHAEL FARADAY, dass nicht nur Strom ein Magnetfeld erzeugt, sondern auch, dass umgekehrt durch ein Magnetfeld elektrischer Strom induziert wird. Zunächst bestätigte sich dies mit einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld ($\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$). Doch weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass sich eine solche sogenannte Induktionsspannung nicht nur durch Änderung des B -Feld erzeugen lässt, sondern auch indem man die vom B -Feld durchsetzte und vom Leiter eingeschlossene Fläche A über die Zeit ändert.

Weiter hat sich eine direkte Beziehung zwischen der Induktionsspannung U_{ind} und der Änderung des magnetischen Flusses Φ ergeben. Nach der LENZ'schen Regel muss die Induktionsspannung der eigenen Ursache entgegenwirken. Damit ergibt sich das FARADAY'sche Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Die Gleichung lässt sich im Allgemeinen auch aus der MAXWELL-Gleichung $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ aus der Elektrodynamik ableiten. Denn für einen Leiter entlang einer geschlossenen Kurve C , welche die Fläche A einschließt, gilt

$$U_{\text{ind}} = \oint_C \vec{E} d\vec{s} = \int_A \nabla \times \vec{E} d\vec{A} = \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

Selbstinduktion einer Spule

Bei der Selbstinduktion in einer elektrischen Spule findet das Induktionsgesetz eine Anwendung. Wenn sich die Stromstärke in einer Spule ändert ($\frac{dI}{dt} \neq 0$), kommt es zu einer sogenannten Selbstinduktion, d.h. das von der Spule erzeugte Magnetfeld induziert bei der Spule selbst wieder eine Spannung. Hierbei verändert sich auch der magnetische Fluss Φ . Mit der Gleichung für den magnetischen Fluss und der Tatsache, dass die Feldstärke der Spule proportional zum fließenden Strom ist, ergibt sich

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} = L \cdot I. \quad (3)$$

Hierbei ist L die Selbstinduktivität der Spule mit der Einheit $[L] = 1 \text{ H}$ (Henry).

Für den Fall, dass der Durchmesser der Spule viel kleiner als deren Länge ist, erhält man aus dem BIOT-SAVART-Gesetz für die Induktivität einer Spule mit der Anzahl an Windungen n und Länge l

$$L = n^2 \cdot \frac{\mu_0 A}{l}. \quad (4)$$

Die Fläche, welche senkrecht zu den Feldlinien steht und genau die Querschnittsfläche der Spule ist, ändert sich bei Variation der Stromstärke nicht. Daraus kann gefolgert werden, dass sich das Magnetfeld linear zur Stromstärke ändert. Dadurch wird eine Spannung in der Spule selbst induziert.

Elektromagnete

Bei einem Elektromagnet wird durch einen stromdurchflossenen Leiter in Form einer Spule ein Magnetfeld erzeugt. Der elektrische Strom erzeugt um den Leiter ein kreisförmiges Magnetfeld, welche durch die Rechte-Hand-Regel bestimmt werden kann. Siehe Abbildung 1.

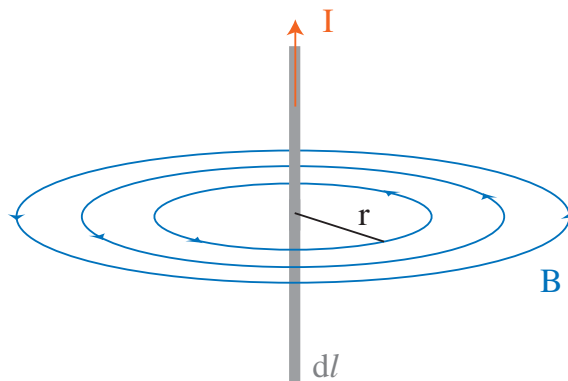


Abbildung 1: Veranschaulichung des B-Feldes um einen stromdurchflossenen Leiter.

Mit dem BIOT-SAVART-Gesetz

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (5)$$

2 Grundlagen

lässt sich an einem Punkt mit Abstand \vec{r} zum mit Strom I durchflossenen Leiterstück $d\vec{l}$ die Feldstärke $d\vec{H}$ berechnen.

Da sich die Leiterschleifen in einer Spule überlagern, entsteht im Innern der Spule ein annähernd homogenes Magnetfeld. Bei einer Windungszahl von n ergibt sich ein n -mal stärkeres B-Feld als bei einem einzelnen Leiter. Für einen langen, spulenförmigen Elektromagneten mit n Windungen, Länge l und angelegten Strom I , ergibt sich für den Betrag der Flussdichte im Innern der Spule

$$B = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{n}{l} \cdot I. \quad (6)$$

Hierbei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante und μ_r die Permeabilität des Mediums, im Vakuum nimmt diese den Wert 1 an.

B-Feld zwischen zwei parallelen Leitern

Das Magnetfeld des unten beschriebenen Versuchsaufbaus kann durch zwei parallele Leiter angenähert werden. Dabei werden diese als hinreichend lang angenommen. Eine schematische Zeichnung ist in Abbildung 2 ersichtlich.

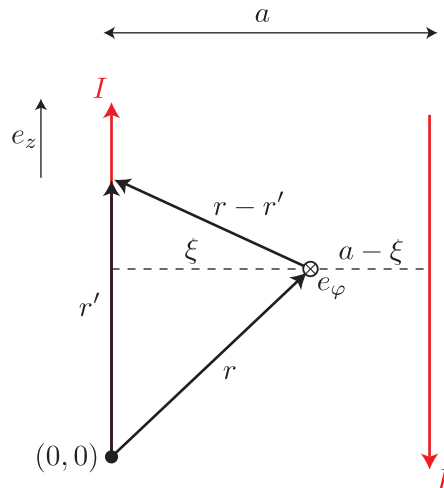


Abbildung 2: Zwei parallele Leiter im Abstand a .

Mit BIOT-SAVART erhält man

$$B(\xi) = B_1(\xi) + B_2(a - \xi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\xi} \vec{e}_\varphi + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{a - \xi} \vec{e}_\varphi \quad (7)$$

mit $\xi := a/2$:

$$= \frac{2\mu_0 I}{a\pi} \vec{e}_\varphi \quad (8)$$

als Betrag des resultierenden B-Feldes in der Mitte der beiden Leiter durch die Überlagerung beider durch die Leiter erzeugten B-Felder.

2.2 Das OHM'sche Gesetz als Spezialfall der BOLTZMANN'schen Transportgleichung

Das OHM'sche Gesetz beschreibt die Zusammenhänge zwischen dem Widerstand R , der Spannung U und dem Stromstärke I . Dabei ist U die Spannung zwischen den Enden des Leiters und I der Strom, der durch den Leiter fließt. Es gilt der Zusammenhang

$$R = \frac{U}{I} = \text{const.} \quad [R] = 1 \, \Omega,$$

welcher besagt, dass die Spannung proportional zum Strom ist. Dabei wird die Konstante als elektrischer Widerstand bezeichnet. Bei einem OHM'schen Leiter lässt sich der Widerstand auch in Abhängigkeit eines spezifischen Widerstandes ϱ beschreiben:

$$R = \varrho \frac{l}{A} \quad (9)$$

Dabei ist l die Länge des Leiters und A die Fläche des Leiters. Des spezifische Widerstand ϱ ist eine temperaturabhängige Materialkonstante mit der Einheit $[\varrho] = \Omega m$. Im Falle einer linearen Taylorentwicklung der Temperaturabhängigkeit lässt sich dieser mit

$$\varrho(T) = \varrho(T_0) \cdot (1 + \alpha_0 \Delta T) \quad (10)$$

berechnen. Hierbei stellt $\Delta T = T - T_0$ die Temperaturabweichung von $T_0 = 20^\circ\text{C}$ und α_0 den materialspezifischen Temperaturkoeffizient dar.

Eine äquivalente Beschreibung des OHM'schen Gesetzes geht über die Stromdichte j (Strom pro Querschnittsfläche) und der elektrischen Feldstärke E mit

$$j = \sigma \cdot E, \quad (11)$$

wobei $\sigma = 1/\varrho$ die spezifische Leitfähigkeit des Metalls bezeichnet.

Dieses Gesetz gilt allerdings nur im Spezialfall bei homogenen Leitern und konstanter Temperatur. Temperaturdifferenzen und Inhomogenitäten des Materials können dazu führen, dass das Potential für die Ladungsträger nicht konstant ist und es dadurch zu einer zusätzlichen Ladungsverschiebung im Leiter kommt, da die Ladungsträger aus den höherenergetischen Bereichen in solche kleinerer Energie diffundieren. Die BOLTZMANN'sche Transportgleichung

$$E = \frac{j}{\sigma} + S \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{1}{e} \cdot \frac{d\mu}{dz} \quad (12)$$

liefert für lineare Leiter wie Metalle oder Halbleiter im betrachteten Temperaturbereich einen allgemeinen Zusammenhang, der das OHM'sche Gesetz als Spezialfall beinhaltet mit den zusätzlichen Größen μ (das chemisches Potential) und S (der SEEBECK-Koeffizient), welche wiederum von der FERMI-Energie ε_F und der thermischen Energie $k_B T$ abhängen. Das chemische Potential μ gibt die mittlere Energie der zum Ladungstransport beitragenden Elektronen an und repräsentiert hier gerade die GIBBS'sche freie Energie. Der SEEBECK-Koeffizient S wird auch als (absolute) differentielle Thermokraft bezeichnet und ist eine materialspezifische Größe.

2.3 Die Thermodiffusions- und Kontaktspannung

In einigen Lehrbüchern wird als Ursache für die Entstehung einer Thermospannung die Temperaturabhängigkeit der Kontaktspannung zweier Metalle angeführt. Die Erklärung, dass die Kontaktspannungsdifferenz zweier verschieden warmer Lötstellen gerade die Thermospannung entspricht, ist eine weit verbreitete Vorstellung, welche sich allerdings widerlegen lässt. Es ist vielmehr so, dass sich die Thermospannung hauptsächlich auf Transporteigenschaften der Ladungsträger zurückführen lässt.

Kontaktspannung

Die Kontaktspannung kommt dadurch zustande, dass Ladungsträger vom Material mit dem größeren chemischen Potential in das benachbarte Material übergehen. Es bildet sich im Übergangsbereich ein elektrisches Feld, welches sich mit Gleichung (12) bei konstanter Temperatur, also $dT/dz \rightarrow 0$ und $j = 0$ ausdrücken lässt mit

$$E = -\frac{1}{e} \cdot \frac{d\mu}{dz}. \quad (13)$$

Damit ergibt sich für die Kontaktspannung

$$U_K^{A|B} = \int_A^B E dz = -\frac{1}{e} \int_A^B d\mu = -\frac{1}{e} \cdot (\mu_B - \mu_A). \quad (14)$$

Die chemischen Potentiale μ_A und μ_B sind temperaturabhängig. So gilt im Elektronengas-Modell mit den quasifreien Elektronen für $k_B T \ll \varepsilon_F$

$$\mu \approx \varepsilon_F \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{k_B^2 T^2}{\varepsilon_F^2} \right) \quad (\text{s. [Sch67, S.15]}). \quad (15)$$

Setzt man dies nun in Gleichung (14), ergibt sich mit

$$U_K^{A|B}(T) = -\frac{1}{e} \cdot (\varepsilon_{F,B} - \varepsilon_{F,A}) - \frac{\pi^2 k_B^2}{12e} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{F,A}} - \frac{1}{\varepsilon_{F,B}} \right) \cdot T^2 \quad (16)$$

die Temperaturabhängigkeit der Kontaktspannung. Diese ist allerdings sehr klein, da sogar bei Raumtemperatur der zweite Term um vier bis fünf Zehnerpotenzen kleiner ist als der erste Term.

Ein Thermoelement kann grundsätzlich zwei Formen haben: Entweder eine stromlose Schaltung, bei der ein Voltmeter mit hinreichend großem Innenwiderstand in Serie geschaltet ist, oder eine geschlossene Leiterschleife, in welchem es zu einem stationären thermoelektrischen Kreisstrom kommt. Siehe hierzu auch Abbildung 3.

Verwendet man nun ein offenes Thermoelement, lässt sich die Differenz der beiden Kontaktspannungen durch

$$\Delta U_K = U_K^{A|B}(T_1) - U_K^{A|B}(T_2) = \frac{\pi^2 k_B^2}{12e} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{F,A}} - \frac{1}{\varepsilon_{F,B}} \right) \cdot (T_2^2 - T_1^2) \quad (17)$$

darstellen. Befindet sich das Thermoelement auf einer konstanten Temperatur, heben sich die zwei Kontaktspannungen auf. Andernfalls ergeben sich Spannungsdifferenzen im μV -Bereich pro

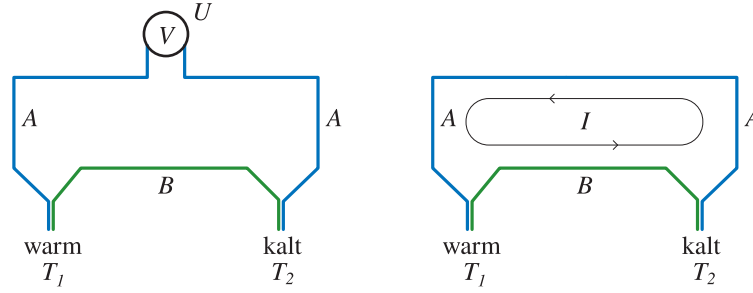


Abbildung 3: Die zwei Formen eines Thermoelements. Links: Thermoelement mit der Thermospannung U für $T_1 \neq T_2$. Rechts: Kurzschluss-Fall mit stationärem thermoelektrischen Kreisstrom, dessen Richtung von den Thermokräften der zwei Metalle A und B abhängt.

Grad Temperaturdifferenz. Da sich die Thermospannung in den gleichen Größenordnungen bewegt, kann man dazu verleitet werden, die gemessene Thermospannung auf die sich ergebende Kontaktspannungsdifferenz zurückzuführen.

In Gleichung (15) ist klar ersichtlich, dass das chemische Potential mit fallender Temperatur zunimmt. Da sich die Ladungsträger stets in Richtung des niedrigeren Potentials bewegen, ergäbe sich an der warmen Stelle eine negative und an der kalten Stelle eine positive Ladung. Man beobachtet aber das genaue Gegenteil.

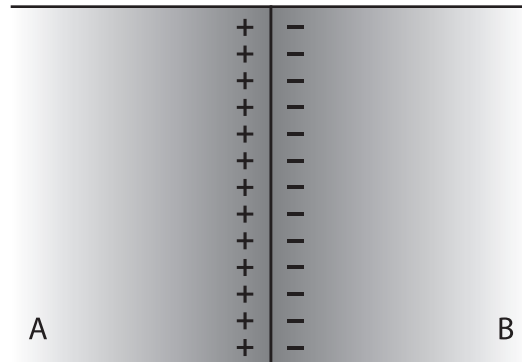


Abbildung 4: Elektrische Doppelschicht an der Grenzfläche zweier Metalle mit verschiedenem chemischen Potential.

Im Falle eines Kurzschlusses des Thermoelements beeinflusst die Kontaktspannungsdifferenz den Kreisstrom gar nicht, da die entstandenen Sprünge im elektrostatischen Potential φ an den zwei Kontaktstellen gerade die chemischen Potentiale μ_A und μ_B kompensieren.

Die erhaltene elektrische Doppelschicht (siehe Abb. 4) ruft einen Sprung im elektrostatischen Potential hervor, der durch die unterschiedlichen chemischen Potentiale verursacht wird. Also gilt

$$-e(\varphi_A - \varphi_B) = -(\mu_A - \mu_B) \quad (18)$$

$$\Rightarrow \left(\varphi_B - \frac{\mu_B}{e} \right) = \left(\varphi_A - \frac{\mu_A}{e} \right). \quad (19)$$

Beide Erklärungen können nicht zur Beschreibung der Entstehung der Thermospannung herangezogen werden.

Thermodiffusionsspannung

Der Effekt der Thermodiffusion, auch Thermophorese genannt, ist immer noch ein großes Forschungsgebiet. Während sich Wärmediffusionseffekte in Gasen klassisch gut erklären lassen, ist man in Fluiden oder gar wie in unserem Fall in Festkörpern gezwungen, in die Festkörperphysik und die Quantenmechanik zu gehen, um eine genaue Beschreibung der Vorgänge zu erhalten. Es lassen sich jedoch die grundlegendsten Vorgänge im klassischen Bild mittels des Elektronengasmodells für den SEEBECK-Effekt genügend gut erklären.

Betrachtet wird ein homogenes Metallstück, welches an einem Ende eine höhere Temperatur aufweist als am anderen Ende, d.h. $T_2 < T_1$ bezüglich Abbildung 5.

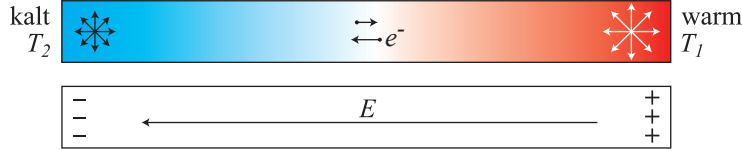


Abbildung 5: Der Temperaturgradient führt zu einer Diffusion der Ladungsträger. Auf Grund der BROWN'schen Bewegung bewegen sich die Elektronen im Mittel schneller in Richtung kaltes Ende. Dadurch wird ein elektrisches Feld erzeugt.

Da am kalten Ende ein tieferes Potential herrscht, kommt es zu einer Ladungsträgerverschiebung, dem Temperaturgradienten entgegengesetzt. Dies lässt sich insbesondere im Rahmen des Elektronengasmodells auch dadurch erklären, dass die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen auf der warmen Seite durch die BROWN'sche Bewegung größer ist als auf der kalten Seite. Damit gibt es im Total eine Geschwindigkeit der Elektronen in Richtung der kalten Seite. Diese werden dort angesammelt, sodass eine negative Ladung am kalten Ende entsteht.

Das entstandene elektrische Feld wirkt dem Thermodiffusionsstrom entgegen, sodass ein dynamisches Gleichgewicht eintritt, in welchem genauso viele Teilchen vom heißen zum kalten Ende diffundieren wie umgekehrt. Im Gleichgewicht $j = 0$ erhält man für das entstandene elektrische Feld aus der Transportgleichung (12)

$$E = S \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{1}{e} \cdot \frac{d\mu}{dz} \quad (20)$$

$$= \left(S - \frac{1}{e} \cdot \frac{d\mu}{dT} \right) \cdot \frac{dT}{dz}. \quad (21)$$

Der Anteil des chemischen Potential an den Kontaktstellen wirkt hier also dem Thermostrom entgegen. Ein ungefährender Verlauf der Potentialdifferenzen im Leiter ist in Abbildung 6 ersichtlich.

Der Thermodiffusionsstrom wird also im Wesentlichen durch den dominierenden SEEBECK-Term bestimmt, welcher durch die temperaturbedingte Änderung des chemischen Potential abgeschwächt wird.

Da für das elektrische Feld die Beziehung $E = -d\varphi/dz$ gilt, folgt für das Potential mit Gleichung (21) $d\varphi = -SdT + \frac{1}{e}d\mu$. Das heißt, dass sich eine positive Thermodiffusionsspannung $U_{TD}^{w \rightarrow k}$ zwischen dem warmen (w) und dem kalten (k) Ende bildet mit

$$\begin{aligned} U_{TD}^{w \rightarrow k} &= \varphi_w - \varphi_k = \int_{\varphi_k}^{\varphi_w} d\varphi = \int_{z_w}^{z_k} E dz \\ &= \int_{T_1}^{T_2} S dT - \frac{1}{e} \int_{z_w}^{z_k} d\mu = \int_{T_1}^{T_2} S dT - \frac{1}{e} [\mu(T_2) - \mu(T_1)]. \end{aligned} \quad (22)$$

2 Grundlagen

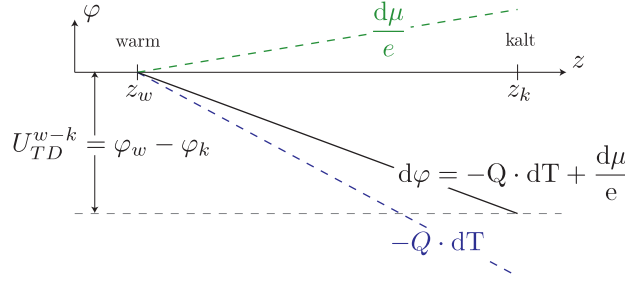


Abbildung 6: Potentialverlauf am Metallelement. Hierbei wurde ein linearer Temperaturverlauf angenommen.

Lässt man die Temperaturabhängigkeit von S fallen, was zumindest bei hinreichend kleinen Temperaturdifferenzen ($|T_2 - T_1| \ll T_1, T_2$) legitim ist, erhält man

$$U_{TD}^{w \rightarrow k} = S[T_2 - T_1] - \frac{1}{e}[\mu(T_2) - \mu(T_1)]. \quad (23)$$

Für Metalle liegt diese Spannung zwischen 1 und 10 $\mu\text{V/K}$. Diese lässt sich allerdings nicht so ohne weiteres messen, da beim Anschluss eines Voltmeters zusätzlich Thermodiffusions- und Kontaktspannungen der Zuleitungen und Übergänge entstehen.

Summiert man nun alle entstandenen Kontakt- und Thermodiffusionsspannungen aus (14) und (23), d.h.

$$U_{TD,A}^{k \rightarrow w} = -S_A[T_2 - T_1] + \frac{1}{e}[\mu_A(T_2) - \mu_A(T_1)] \quad (24)$$

$$U_{TD,B}^{w \rightarrow k} = S_B[T_2 - T_1] - \frac{1}{e}[\mu_B(T_2) - \mu_B(T_1)] \quad (25)$$

$$U_K^{A|B} = -\frac{1}{e}[\mu_B(T_2) - \mu_A(T_2)] \quad (26)$$

$$U_K^{B|A} = \frac{1}{e}[\mu_B(T_2) - \mu_A(T_2)] \quad (27)$$

im Thermoelement zusammen, ergibt sich für die resultierende Spannung

$$U_{\text{Thermo}} = (S_B - S_A)[T_2 - T_1] = (S_B - S_A)\Delta T. \quad (28)$$

Berücksichtigt man nun die Temperaturabhängigkeit des SEEBECK-Koeffizienten, erhält man mittels Herleitung über statistische Betrachtungen mit dem Elektronengasmodell (vgl. [Jae98] und [Ash76])

$$S = -\frac{k_B}{e} \cdot \frac{\langle E \rangle - \mu}{k_B T} = -\frac{\pi^2 k_B}{2e} \cdot \frac{k_B T}{\varepsilon_F}. \quad (29)$$

Insbesondere erhält man in (28) den Ausdruck $U_{\text{Thermo}} = \int_{T_1}^{T_2} (S_B - S_A) dT$. Setzt man nun (29) in dieses Integral ein und löst es, ergibt sich die temperaturabhängige Thermospannung

$$U_{\text{Thermo}} = \frac{\pi^2 k_B^2}{4e} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{F,A}} - \frac{1}{\varepsilon_{F,B}} \right) \cdot (T_2^2 - T_1^2). \quad (30)$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der Differenz der temperaturabhängigen Kontaktspannungen in (17), bemerkt man, dass $U_{\text{Thermo}} = 3 \cdot \Delta U_K$. D.h. die beiden Werte befinden sich ungefähr in der gleichen Größenordnung.

An dieser Stelle ist allerdings zu bemerken, dass das Elektronengasmodell zu einfach ist, um die Temperaturabhängigkeit des SEEBECK-Koeffizienten adäquat zu beschreiben. Bei genaueren Berechnungen des Thermodiffusionsstromes in Metallen wie z. B. in [Ash76], ist ersichtlich, dass die Abhängigkeit der freien Weglänge der Elektronen von ihrer Energie eine wichtige Rolle spielt. Da sich diese Energieabhängigkeit stark verschieden verhält, je nachdem wie die genauen Streumechanismen aussehen, haben Verunreinigungen bzw. Defekte im Metallgitter einen starken Einfluss auf die Thermospannung.

Dies wird die Messung entsprechend erschweren, da handelsübliche Metalle stets Legierungen sind und deshalb wegen ihren Einschlüssen in die Kristallstruktur schwer abschätzbare Thermospannungen hervorrufen können.

3 Vormessungen

Vor der eigentlichen Bestimmung des SEEBECK-Koeffizienten wurden einige Messungen zum Verhalten des Widerstandes und zur Messmethode durchgeführt.

3.1 Widerstand

Um das Verhalten und die Größenordnung des Widerstandes an den Kontaktstellen der beiden Metalle zu erhalten, wurde der Widerstand zweier am Ende kontaktierter Metallstreifen untersucht. Dabei wurde durch die beiden Metallstreifen ein konstanter Strom geleitet und der Spannungsabfall über den Metallstreifen ermittelt. Der mit dem OHM'schen Gesetz ermittelte Widerstand war innerhalb der Messgenauigkeit mit dem theoretisch über die Geometrie der beiden Metallstreifen ermittelten Wert gleich.

Auch die Erhitzung der Kontaktstelle hat keine mit den verwendeten Messgeräten messbare Abweichung vom theoretischen Wert der beiden Metallstreifen ergeben, sodass im Folgenden der Widerstand der verwendeten Leiterschleife über die Widerstände der verwendeten Metallstäbe erfolgt.

3.2 B-Feld-Messung mit Hall-Sonde

Durch die einfache Handhabung und den schnellen Messvorgang wurde eine Messung des B-Feldes mit einer Hall-Sonde bevorzugt. Deshalb wurden die ersten Messungen des Magnetfeldes einer Leiterschleife aus zwei unterschiedlichen Metallstreifen mit einer Hall-Sonde durchgeführt. Dieser Versuchsaufbau, mit welchem auch die Widerstände der Kontaktstellen überprüft worden sind, ist in Abbildung 7 ersichtlich.

Bei der Messung mittels Hallsonde sind mehrere Probleme aufgetreten. Da es ziemlich schwierig war, die Hall-Sonde genau senkrecht zwischen den Leitern zu platzieren, frästen wir einen Schlitz in den einen Metallstreifen. So war es gut möglich, die Hall-Sonde senkrecht in die Mitte des Thermoelements zu positionieren.

Doch auch diese Optimierung nützte nicht viel, da die zu messenden Felder so klein waren, dass der größte gemessene Ausschlag in der besten Verstärkung gerade einmal $1/5$ des Maximalausschlages war. Deshalb wurde entschieden, die Messungen mittels Kompensation des Magnetfeldes

4 Hauptmessungen

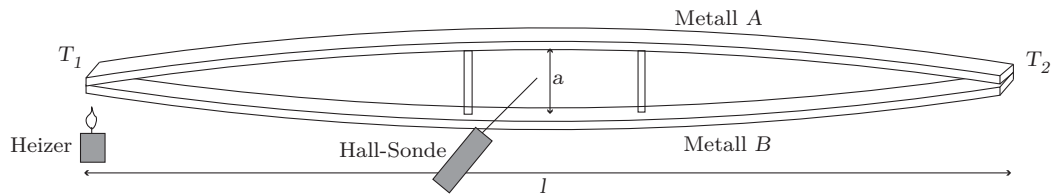


Abbildung 7: Zwei an den Enden zusammengeschraubte Metallstreifen wurden mittels Hölzchen auseinander gedrückt. Mit der so entstandenen Leierschleife wurden die ersten Messversuche unternommen.

durch eine Spule durchzuführen.

Während der Vorbereitungen des Versuchsumbaus erhielten wir ein Thermoelement von *LD-Didaktik*. Dieses diente von da an als neuer Ausgangspunkt des Projektes und als Vorlage für weitere Produktionen von Thermoelementen.

4 Hauptmessungen

4.1 Versuchsaufbau und -beschreibung

4.1.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau (siehe Abb.8) besteht aus einer geschlossenen Leierschleife, die sich aus zwei unterschiedlichen Metallen zusammensetzt, in deren Mitte eine Kompassnadel möglichst reibungsfrei gelagert ist. Die lange Spule zur Kompensation, bestehend aus zwei Spulen mit jeweils 500 ± 5 Windungen, wurde mittig an der Leierschleife montiert. Um eine Temperaturdifferenz zwischen den beiden Enden der Leierschleife zu erzeugen, wurde die eine Seite mit einem Lötbrenner erhitzt und die andere Seite mit einem CPU-Kühler samt Kühlrippen auf Raumtemperatur gehalten. Die Messung der Temperatur an den beiden Enden erfolgte mit einem Digitalthermometer mit zwei hitzebeständigen Thermofühlern, die jeweils mit einer auf die Leierschleife geschobenen Kupferhülse vor der direkten Einwirkung der Flammen geschützt wurden.

Der Strom durch die Spulen wurde mittels einer regelbaren Stromquelle eingestellt und der Wert des fließenden Stroms mittels eines Multimeters gemessen.

Es wurden insgesamt drei Kombinationen von Metallen gemessen. Der obere Bügel der Leierschleife bestand immer aus Kupfer. Für den unteren Teil wurden Konstantan¹, Nickel-Chrom-Stahl 1.4571² und Eisen verwendet. Dabei hatte der Kupferbügel eine Länge $l = 175 \pm 0,1$ mm und eine Querschnittsfläche $A = 19,6 \pm 0,016$ mm². Der untere Metallstab hatte eine Länge von $l = 140 \pm 0,1$ mm und eine Querschnittsfläche $A = 78,5 \pm 0,016$ mm².

4.1.2 Versuchsbeschreibung

Bevor mit den Messungen begonnen werden konnte, wurde der Versuchsaufbau so ausgerichtet, dass die Kompassnadel senkrecht zu den später anliegenden Felden zu stehen kam. Danach

¹Konstantan ist eine Legierung aus 55% Kupfer, 44% Nickel und 1% Mangan

²Der Stahl 1.4571 besteht aus Eisen mit den Zusätzen 16,5-18,5% Chrom, 2,0-2,5% Molybdän, 10,5-13,5% Nickel und Spuren von Silizium, Mangan, Titan und Kohlenstoff vgl.[TKM06]

4 Hauptmessungen

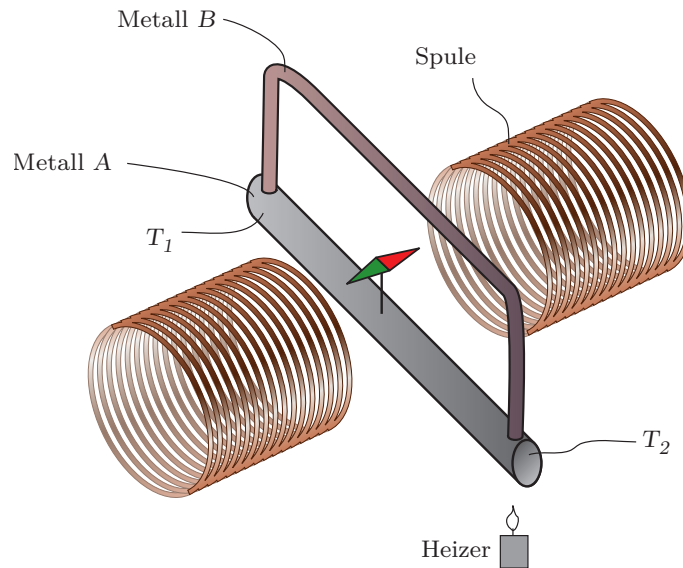


Abbildung 8: Schematische Zeichnung des verwendeten Versuchsaufbaus, ohne Kühlelement.

wurden alle verwendeten Geräte mit Spannung versorgt und nochmals überprüft, ob die Kompassnadel noch senkrecht zu den erwarteten Felden stand, um sie gegebenenfalls nachzujustieren. Nun wurde das eine Ende der Leiterschleife mit dem Lötbrenner erhitzt und möglichst konstant auf einer Temperatur gehalten. Dabei konnte man einen Ausschlag der Kompassnadel durch das Magnetfeld der Leiterschleife beobachten. Nun wurde der Strom in der Spule langsam bis zum Umschlag der Kompassnadel erhöht. Es wurden Stromstärke und die Temperaturen an den Enden der Leiterschleife notiert. Nun wurde der Strom wieder langsam bis zum erneuten Umschlagen der Nadel reduziert und die gemessenen Werte von Strom und Temperatur notiert. Die oberen Temperaturen T_o am heißen Ende der Leiterschleife wurden im 50°C -Abstand von 150°C bis 650°C erhöht und jeweils die Umschlagpunkte der Nadel bestimmt. Durch die schnellen Änderungen der oberen Temperatur wurde diese bei der angestrebten Temperatur angenommen und der Fehler auf $\pm 10^\circ\text{C}$ festgelegt. Die untere Temperatur konnte auf $\pm 1^\circ\text{C}$ genau abgelesen werden. Die ermittelten Daten dieser Messreihen können aus dem Anhang entnommen werden. Zusätzlich wurden Messungen für einen konstanten Strom und eine sich ändernde obere Temperatur durchgeführt. Durch die Verzögerung, die der Erhitzungsprozess mit sich bringt, erwies sich diese Messmethode als nicht so genau. Die ermittelten Daten wurden mit den Messwerten bei konstanter Temperatur verglichen. Die Messwerte lagen bei ähnlichen Temperatur-Strom-Verhältnissen, sodass diese Messungen keine neuen Erkenntnisse brachten.

4.2 Auswertung

Beim Umschlagen der Kompassnadel gilt die Gleichheit der beiden anliegenden Felder. Für die Spule gilt nach Gleichung (6): $B_{\text{Spule}} = \mu_0 \cdot n \cdot \frac{I}{l}$, mit μ_0 der magnetischen Feldkonstante, I der Strom, der durch die Spule fließt, n der Windungszahl und l der Länge der Spule. Das Magnetfeld der Leiterschleife kann durch das Magnetfeld zweier paralleler Leiter abgeschätzt werden. Für diese gilt Gleichung (8): $B = \frac{2\mu_0 \cdot I_l}{a\pi}$, dabei ist I_l der durch die Leiterschleife fließende Strom und a der Abstand zwischen den beiden Leitern. Nun kann der Strom I_l mit dem OHM'schen Gesetz $I = \frac{U}{R}$ berechnet werden, die Spannung U ist durch die Thermospannung nach Gleichung (28) mit $U_{\text{Thermo}} = \Delta T \cdot (S_A - S_B)$ gegeben, wobei ΔT die Temperaturdifferenz an den beiden Enden der Leiterschleife ist und $S_A - S_B$ die Differenz der SEEBECK-Koeffizienten. Durch das Einsetzen

4 Hauptmessungen

der angegebenen Beziehungen ergibt sich für das Magnetfeld der Leiterschleife:

$$B = \frac{2\mu_0 \Delta T (S_A - S_B)}{a\pi R} . \quad (31)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Magnetfelder kann man dann die Differenz der SEEBECK-Koeffizienten $S_A - S_B$ berechnen:

$$(S_A - S_B) = \frac{a \cdot \pi \cdot R \cdot N \cdot I}{2 \cdot l \cdot \Delta T} . \quad (32)$$

$$(33)$$

Der Fehler wurde nach gültiger Fehlerfortpflanzung (38) berechnet. Der hier auftretende Widerstand R lässt sich unter Berücksichtigung des linearen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes α mit Gleichung (10) berechnen. Da die Temperatur T linear in den Widerstand eingeht, kann man den Widerstand als Mittelwert von Widerstand bei oberer Temperatur $R(T_o)$ und Widerstand bei unterer Temperatur $R(T_u)$ berechnen. Da unterschiedliche Metalle und unterschiedliche Geometrien in der Leiterschleife verbaut sind, ergibt sich der Widerstand als Summe über die Einzelwiderstände. Insgesamt ergibt sich:

$$R_{\text{ges}}(T_u, T_o) = R_A(T_u, T_o) + R_B(T_u, T_o) \quad (34)$$

$$= \frac{R_A(T_u) + R_A(T_o)}{2} + \frac{R_B(T_u) + R_B(T_o)}{2} \quad (35)$$

$$= \frac{\varrho_A \cdot l_A}{A_A} \left(1 + \alpha_A \left(\frac{T_u + T_o}{2} - 20\text{K} \right) \right) + \frac{\varrho_B \cdot l_B}{A_B} \left(1 + \alpha_B \left(\frac{T_u + T_o}{2} - 20\text{K} \right) \right) . \quad (36)$$

Der Fehler wurde nach gültiger Fehlerfortpflanzung (39) berechnet.

4.2.1 Hysterese- und Reibungseffekte

Beim Messen von $S_A - S_B$ ergaben sich jeweils zwei Werte für den Strom in Abhängigkeit davon, ob der Strom erhöht oder reduziert wurde. Diese zwei Werte für den Strom kann man durch mehrere Effekte beschreiben:

- Es wurde versucht, möglichst wenig magnetisierbares Material beim Versuchsaufbau zu verwenden. Trotzdem war es nicht ganz möglich, völlig darauf zu verzichten. So war zum Beispiel das Stativmaterial, auf dem die Leiterschleife und auch die Spulen befestigt waren, aus Eisen. Durch diese magnetisierbaren Materialien am Versuchsaufbau ist es wahrscheinlich zu Hystereseeffekten gekommen. Diese beeinflussen aber nicht den qualitativen Verlauf der Temperaturabhängigkeit des SEEBECK-Koeffizienten, sondern hat nur eine, für alle Temperaturen gleiche, Nullpunktsverschiebung zur Folge.
- Die verwendete Kompassnadel musste, um in den Versuchsaufbau zu passen, relativ kurz sein. Dadurch ist das Dipolmoment der Nadel und auch die auf die Nadel wirkende Kraft relativ klein. Somit wird auch ein Feld einer bestimmten Größe benötigt, um die (sehr kleine) Reibungskraft der Nadel zu überwinden.

Insgesamt aber erkennt man, dass die beiden Effekte, die für die zwei ermittelten Werte verantwortlich sind, in beiden Richtungen gleich groß sind. Damit ist es möglich, die beiden erhaltenen Differenzen der SEEBECK-Koeffizienten $S_A - S_B$ zu mitteln. Es wurden die Differenzen $S_A - S_B$ gemittelt, da es nicht möglich war, beide Messungen des Stroms bei einer gleichen unteren Temperatur T_u durchzuführen und $S_A - S_B$ nach Gleichung (32) von der Temperaturdifferenz abhängig ist.

4.2.2 Die Leiterschleife aus Kupfer und Konstantan

Die Leiterschleife aus Kupfer und Konstantan wurde als Erstes vermessen. Für Kupfer gilt $\rho = 1,68 \cdot 10^{-2} \Omega \text{mm}^2 \text{m}^{-1}$ und $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, für Konstantan gilt $\rho = 0,5 \Omega \text{mm}^2 \text{m}^{-1}$ und $\alpha = 5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Die Literaturwerte des von Platin abhängigen SEEBECK-Koeffizienten sind $S_{Cu} = 6,5 \mu\text{V/K}$ und $S_{\text{Konstantan}} = -35 \mu\text{V/K}$. Damit ergeben sich dann die in Abbildung 9 dargestellten Werte der Messreihen. Der Fehler der einzelnen Messwerte liegt im Bereich von 5-10 $\mu\text{V/K}$.

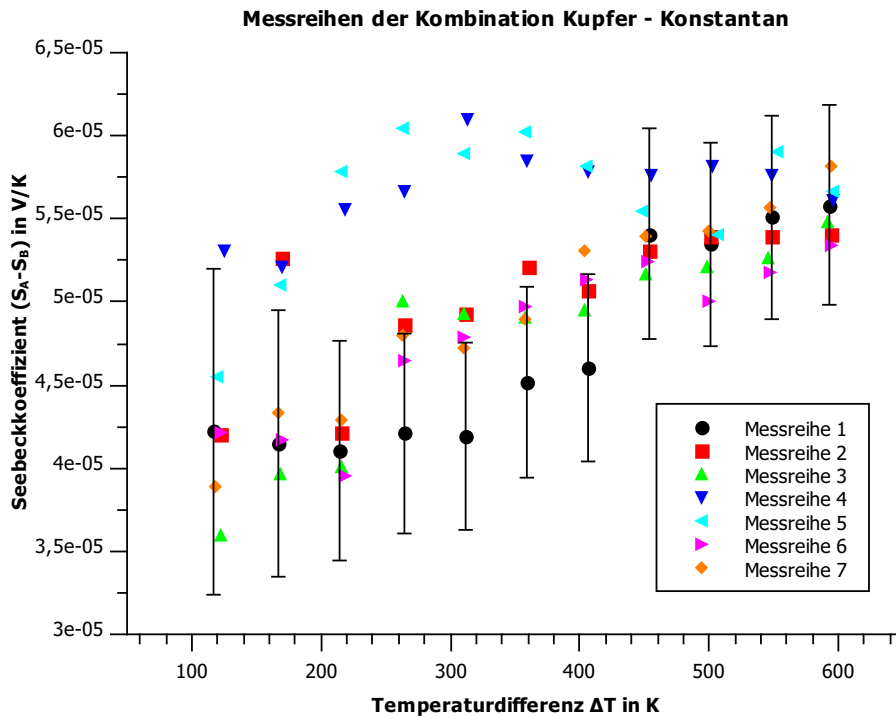


Abbildung 9: Die berechneten Differenzen der SEEBECK-Koeffizienten $S_A - S_B$ der sieben aufgenommenen Messreihen. Exemplarisch wurden die Fehler der Messreihe 1 dargestellt.

In Abbildung 9 kann man schon die Temperaturabhängigkeit des SEEBECK-Koeffizienten erkennen. Auch kann man sehr gut erkennen, dass die Messreihen in den Fehlerbereichen der anderen Messreihen liegen. Hierbei machen Messreihe 4 und 5 eine Ausnahme, da sie zwischen $\Delta T = 150 \text{ K}$ und $\Delta T = 400 \text{ K}$ einen grundsätzlich anderen Verlauf haben. Deshalb wurden diese beiden in der weiteren Betrachtung ausgeklammert (siehe auch Fehlerbetrachtung).

Um die Streuung der einzelnen Messwerte durch vorhandene Abweichungen noch etwas zu verringern, wurde aus den Messreihen 1-3 und 6-7 der jeweilige Mittelwert bei der gleichen oberen Temperatur und damit verbunden ähnlichen Temperaturdifferenz gebildet. Die sich ergebenden Werte wurden in Abbildung 10 dargestellt. Der angegebene Fehler hat sich aus dem Mittelwert

der Fehler ergeben. Es wurde darauf verzichtet, ein gewichtetes Mittel zu verwenden, da diese einzelnen Fehlerwerte kaum voneinander abweichen.

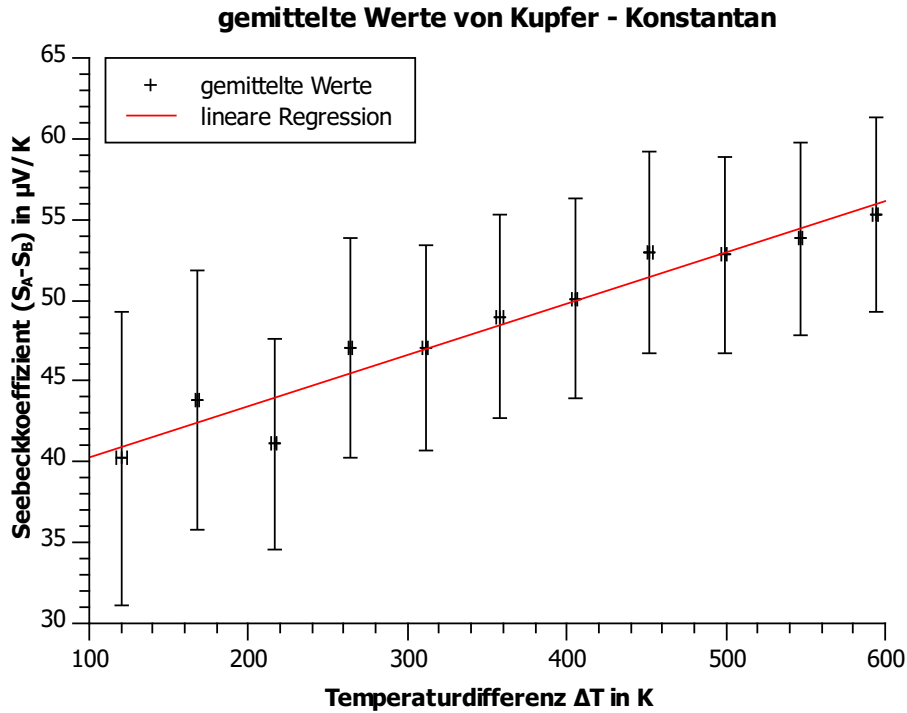


Abbildung 10: Die gemittelten Werte von $S_A - S_B$ der Messreihen 1-3 und 6-7, mit gemittelten Fehlern und linearer Regression.

In Abbildung 10 ist die lineare Abhängigkeit der Differenz der SEEBECK-Koeffizienten eine sehr wahrscheinliche Abhängigkeit von der Temperatur. Die Abweichungen von einer Gerade kommen auch durch die kleine Anzahl an Messungen, die durchgeführt wurden. Mit einer linearen Regression $y = a \cdot x + b$ erhält man einen y-Achsenabschnitt von $b = 37,1 \pm 0,1 \mu V/K$ und eine Steigung von $a = 3,2 \pm 1,4 \mu V/K^2$. Wie in den Grundlagen beschrieben ist der Seebeckkoeffizient $S_A - S_B$ für die Bedingung $\|T_u - T_o\| < T_u$ konstant. Damit erhält man einen theoretischen, konstanten Wert von $S_A - S_B = 38,1 \pm 6,1 \mu V/K$. Bei einem Vergleich mit dem Literaturwert von $S_A - S_B = 41,5 \mu V/K$ stellt man fest, dass der ermittelte Wert nur um 8,2% vom Literaturwert abweicht. Außerdem liegt der Literaturwert in den ermittelten Fehlerbereichen.

Messreihe 4 und 5

Diese beiden Messreihen zeigen ein von den anderen Messreihen verschiedenes Verhalten zwischen $150^\circ C$ und $400^\circ C$. Dafür kann es mehrere Ursachen geben. Zum Einen wurden diese beiden Messungen in einem anderen Raum aufgenommen, in dem es äußere Felder gab, die nicht erkannt wurden. Zum Anderen kann es auch sein, dass die Messungen durch elektrische Geräte gestört wurden. Leider konnte der Verlauf nicht reproduziert werden, so dass es nicht klar ist, welche Fehlerquelle schlussendlich dafür in Betracht kommt.

Zusammenfassung

Es ist erstaunlich, mit welchen einfachen Mitteln es möglich ist den SEEBECK-Koeffizienten mit einer Abweichung von nur 8,2% vom Literaturwert zu bestimmen. Wenn man nun annimmt, dass die bestimmten Magnetfelder etwas zu gering für den fließenden Strom sind, und annimmt, dass der wahre Wert am obere Ende des Fehlerintervalls angenommen wird, so liegt man im Bereich des Literaturwertes. Damit ist diese Messmethode, mit einigen kleinen Korrekturen, mit anderen Messmethoden des SEEBECK-Koeffizienten als gleichwertig zu betrachten.

4.2.3 Leitterschleife aus Kupfer und Nickel-Chrom-Stahl

Als Zweites wurde eine Leitterschleife aus Kupfer und dem Chromstahl 1.4571 verwendet. Die Materialkonstanten von Kupfer sind oben angegeben. Für den Stahl 1.4571 gilt $\rho = 0,75 \Omega\text{mm}^2\text{m}^{-1}$ [TKM06], für legierten Stahl gilt $\alpha = 5 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ [TBM05]. Für diesen Stahl gibt es keinen Literaturwert vom SEEBECK-Koeffizienten, daher kann man nur diejenigen von Eisen ($19 \mu\text{V/K}$) und Nichrom ($26 \mu\text{V/K}$) angeben und versuchen, ihn dort einzuordnen. Mit den Gleichungen von oben ergeben sich die Werte in Abbildung 11.

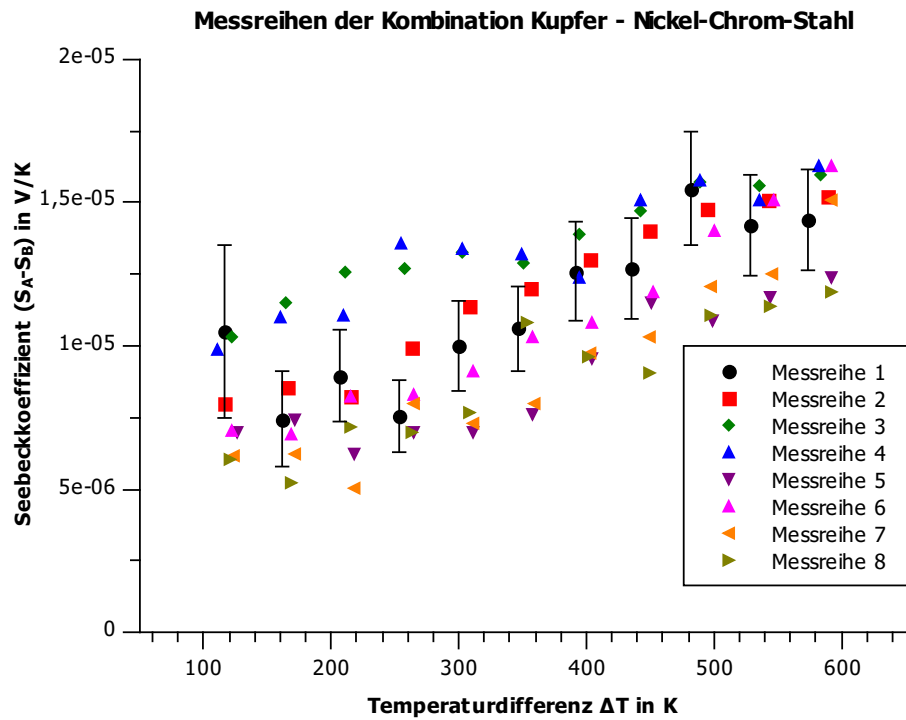


Abbildung 11: Die gemessenen Werte für die Differenz der SEEBECK-Koeffizienten $S_A - S_B$. Exemplarisch sind die Fehler der Messreihe 1 dargestellt.

Auch hier kann man die lineare Abhängigkeit des SEEBECK-Koeffizienten von der Temperatur erkennen. Die Werte sind aber größer gestreut als bei Kupfer-Konstantan. Es liegen auch nicht alle berechneten Werte in den Fehlerbereichen der anderen Messreihen. Trotzdem wird der Mittelwert der Messwerte bei einer Temperaturdifferenz gebildet, um einen besseren Verlauf zu erhalten. Die Temperaturabhängigkeit ist bei dieser Kombination nicht so stark wie bei Kupfer-Konstantan. Man kann sie aber trotzdem deutlich erkennen.

Bei der linearen Regression erhält man einen y-Achsenabschnitt von $b = 5,2 \pm 4,6 \mu\text{V/K}$ und ein Steigung von $a = 1,6 \cdot 10^{-2} \pm 1,1 \cdot 10^{-2} \mu\text{V/K}^2$. Beim Vergleich des berechneten Wertes für ein konstanten SEEBECK-Koeffizienten $(S_A - S_B) = 5,7 \pm 4,9 \mu\text{V/K}$ und dem Literaturwert (bei einer Kombination von Kupfer mit Eisen) von $12,5 \mu\text{V/K}$ sieht man eine sehr deutliche Abweichungen. Daher kann man mit dem ermittelten Ergebnis auf keinen Zusammenhang zwischen dem SEEBECK-Koeffizienten einer Legierung und den Koeffizienten der Bestandteile schließen. Denn in diesem Fall wäre ein Ergebnis zwischen $12 \mu\text{V/K}$ und $20 \mu\text{V/K}$ zu erwarten gewesen. Da aber wie in den Grundlagen schon beschrieben die Spannung auch von den Streueffekten und damit von der mittleren freien Weglänge abhängt, ist es nicht möglich, einen SEEBECK-Koeffizienten aus den Anteilen einer Legierung zu berechnen.

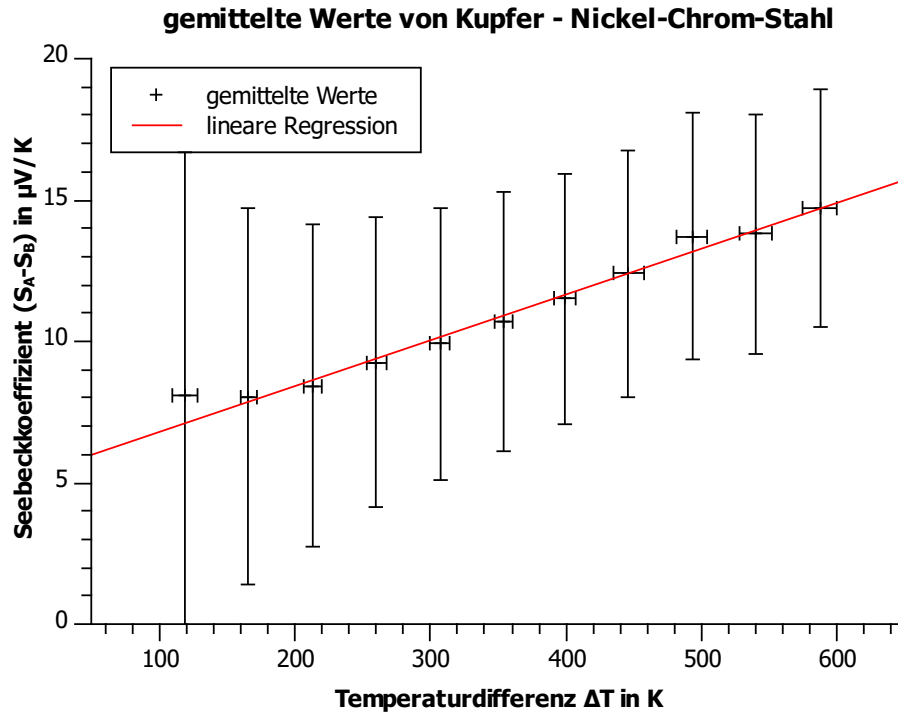


Abbildung 12: Die gemittelten Werte von $S_A - S_B$, mit den gemittelten Fehlern und linearer Regression.

Zusammenfassung

Es ist überraschend, wie gut man den SEEBECK-Koeffizienten einer Legierung in ein gegebenes Rahmen einordnen kann, obwohl die freien Weglängen in einer Legierung nicht einfach als Mittelwert aller freien Weglängen bestimmt werden können. Wenn man nun in Bezug auf die Ergebnisse aus der Messung mit Konstantan berücksichtigt, dass der berechnete Wert eher am oberen Ende des Fehlerintervalls angesetzt werden muss, erhalten wir hier Ergebnisse mit $S_A - S_B > 10 \mu\text{V/K}$, welche sich schon recht nah an denen von Eisen ($S_A - S_B \approx 12 \mu\text{V/K}$) einordnen lassen. Diese Einordnung lässt sich damit begründen, dass in dem Stahl 1.4571 ca. 65% Eisen befinden.

4.2.4 Leiterschleife aus Kupfer und Eisen

Bei dieser Leiterschleife war leider keine sinnvolle Messung eines SEEBECK-Koeffizienten möglich, da durch die Magnetisierung des Eisenstabs das Magnetfeld so stark abgelenkt wurde, dass kein Ausschlag der Kompassnadel erkennbar war. Bei den Temperaturen von 150°C und 200°C konnte noch ein Ausschlag der Kompassnadel registriert und auch ein Umschlagpunkt bestimmt werden. Daher kann ein zu hoher Widerstand in der Leiterschleife als Fehlerquelle ausgeschlossen werden. Leider waren aber keine Messungen oberhalb von 200°C mehr möglich. Auch die Messergebnisse, die bei 150°C und 200°C aufgenommen wurden sind nur eingeschränkt aussagekräftig, da der Ausschlag mit größerer Zeit bei konstanter Temperatur kleiner wurde und somit auch der Umschlagpunkt schwer zu bestimmen war.

Zusammenfassend kann man sagen, dass diese Methode zur Bestimmung des SEEBECK-Koeffizienten für ferromagnetische Materialien nicht anwendbar ist, da die Messung durch die Magnetisierung des Materials unmöglich ist.

4.2.5 Fehlerbetrachtung

Diese Ergebnisse sind recht gut, wenn man bedenkt, dass sicher nicht alle Fehlerquellen erkannt und minimiert wurden. Fehlerquellen, die sicherlich einen größeren Beitrag zur Abweichung beigetragen haben, sind:

- Nichtverschwindende Magnetfelder durch elektrische Geräte usw.
- Hystereseeffekte in den verwendeten Bauteilen
- Reibungseffekte beim Umschlagen der Nadel
- Temperaturschwankungen während einer Messung

Trotzdem kann man mit den erhaltenen Ergebnissen sowohl die Temperaturabhängigkeit des SEEBECK-Koeffizienten, als auch eine Einordnung in die jeweilige Größenordnung erkennen und verstehen.

Bei der Kombination Kupfer und NiCr-Stahl kamen außerdem Probleme beim Regeln des Stroms hinzu, da dieser sehr klein war und nur schwierig so klein korrekt hochgeregelt werden konnte, ohne dass man den Umschlagpunkt verpasste.

5 Quellenverzeichnis

- [See95] SEEBECK, TH. J.: *Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz*, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1895
- [Sch67] SCHULZE, G.E.R.: *Metallphysik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1967
- [Ash76] ASHCROFT, N.W.; MERMIN, N.D.: *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976
- [TKM06] THYSSENKRUPP MATERIAL SCHWEIZ: *NIROSTA 4571 - Datenblatt*, www.thyssen.ch, Datiert auf 02/06
- [TBM05] FISCHER, ULRICH ET AL.: *Tabellenbuch Metall*, Verlag Europa Lehrmittel, Haan-Guiten, 2005
- [Jae98] JÄCKLE, J.: *Über die Ursache der Thermospannung*
<http://www.uni-konstanz.de/FuF/Physik/Jaeckle/papers/thermospannung/index.html>, 1998,
aufgerufen am 24.06.2012
- [Pel04] PELSTER, ROLF: *Thermospannungen - Viel genutzt und fast immer falsch erklärt!*
<http://www.phydid.de/index.php/phydid/article/view/28/28>, 2004,
aufgerufen am 24.06.2012
- [EFU12] eFUNDU, INC: *Thermocouple Theory*
http://www.efunda.com/designstandards/sensors/thermocouples/thmcple_theory.cfm
aufgerufen am 11. Juli 2012
- [Wik] WIKIPEDIA *Verschiedene Artikel*
www.wikipedia.de
aufgerufen ca. am 11. Juli 2012

6 Abbildungsverzeichnis

1	Veranschaulichung des B-Feldes um einen stromdurchflossenen Leiter.	4
2	Zwei parallele Leiter im Abstand a	5
3	Die zwei Formen eines Thermoelements. Links: Thermoelement mit der Thermospannung U für $T_1 \neq T_2$. Rechts: Kurzschluss-Fall mit stationärem thermoelektrischen Kreisstrom, dessen Richtung von den Thermokräften der zwei Metalle A und B abhängt.	8
4	Elektrische Doppelschicht an der Grenzfläche zweier Metalle mit verschiedenem chemischen Potential.	8
5	Der Temperaturgradient führt zu einer Diffusion der Ladungsträger. Auf Grund der BROWN'schen Bewegung bewegen sich die Elektronen im Mittel schneller in Richtung kaltes Ende. Dadurch wird ein elektrisches Feld erzeugt.	9
6	Potentialverlauf am Metallelement. Hierbei wurde ein linearer Temperaturverlauf angenommen.	10
7	Zwei an den Enden zusammengeschraubte Metallstreifen wurden mittels Hölzchen auseinander gedrückt. Mit der so entstandenen Leiterschleife wurden die ersten Messversuche unternommen.	12
8	Schematische Zeichnung des verwendeten Versuchsaufbaus, ohne Kühlelement.	13
9	Die berechneten Differenzen der SEEBECK-Koeffizienten $S_A - S_B$ der sieben aufgenommenen Messreihen. Exemplarisch wurden die Fehler der Messreihe 1 dargestellt.	15
10	Die gemittelten Werte von $S_A - S_B$ der Messreihen 1-3 und 6-7, mit gemittelten Fehlern und linearer Regression.	16
11	Die gemessenen Werte für die Differenz der SEEBECK-Koeffizienten $S_A - S_B$. Exemplarisch sind die Fehler der Messreihe 1 dargestellt.	17
12	Die gemittelten Werte von $S_A - S_B$, mit den gemittelten Fehlern und linearer Regression.	18

7 Anhang

7.1 Fehlerberechnung

Der Fehler zu (32) wurde explizit mit

$$\begin{aligned} \delta(S_A - S_B) &= \left| \frac{\partial(S_A - S_B)}{\partial a} \right| \cdot \delta a + \left| \frac{\partial(S_A - S_B)}{\partial R} \right| \cdot \delta R + \left| \frac{\partial(S_A - S_B)}{\partial N} \right| \cdot \delta N \\ &\quad + \left| \frac{\partial(S_A - S_B)}{\partial I} \right| \cdot \delta I + \left| \frac{\partial(S_A - S_B)}{\partial l} \right| \cdot \delta l + \left| \frac{\partial(S_A - S_B)}{\partial \Delta T} \right| \cdot \delta \Delta T \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(S_A - S_B)}{a} \cdot \delta a + \frac{(S_A - S_B)}{R} \cdot \delta R + \frac{(S_A - S_B)}{N} \cdot \delta N + \frac{(S_A - S_B)}{I} \cdot \delta I \\ &\quad + \frac{(S_A - S_B)}{l} \cdot \delta l + \frac{(S_A - S_B)}{\Delta T} \cdot \delta \Delta T. \end{aligned} \quad (38)$$

berechnet. Und der Fehler des Widerstandes (36) ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \delta R(T_u, T_o) &= \left| \frac{\partial R}{\partial T_u} \right| \delta T_u + \left| \frac{\partial R}{\partial T_o} \right| \delta T_o + \left| \frac{\partial R}{\partial l_A} \right| \delta l_A + \left| \frac{\partial R}{\partial A_A} \right| \delta A_A + \left| \frac{\partial R}{\partial l_B} \right| \delta l_B + \left| \frac{\partial R}{\partial A_B} \right| \delta A_B \\ &= \left(\frac{\varrho_A \cdot l_A \cdot \alpha_A}{2A_A} + \frac{\varrho_B \cdot l_B \cdot \alpha_B}{2A_B} \right) \cdot (\delta T_u + \delta T_o) \\ &\quad + \left(\frac{\varrho_A}{A_A} \delta l_A + \frac{\varrho_A \cdot l_A}{A_A^2} \delta A_A \right) \cdot \left(1 + \alpha_A \left(\frac{T_u + T_o}{2} - 20\text{K} \right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{\varrho_B}{A_B} \delta l_B + \frac{\varrho_B \cdot l_B}{A_B^2} \delta A_B \right) \cdot \left(1 + \alpha_B \left(\frac{T_u + T_o}{2} - 20\text{K} \right) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

7.2 Messwerte und berechnete Werte

Die Messfehler sind, soweit nicht oben angegeben:

- Strom: bei Konstantan $\delta I = 2 \text{ mA}$; bei Chromstahl $\delta I = 1 \text{ mA}$
- Spulenlänge: $\delta l = 3 \text{ mm}$
- Abstand der parallelen Leiter: $\delta a = 0,1 \text{ mm}$

Im Anschluss sind die Wertetabellen angehängt.

Kombination Kupfer - Konstantan

Messreihe 1

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	33	33	41	11	66,47	9,12	17,83	0,71	42,15	9,83
200	33	34	59	13	67,98	7,41	15,07	0,60	41,53	8,01
250	36	36	67	23	61,16	5,77	20,99	0,84	41,08	6,61
300	36	37	80	32	60,02	5,08	24,11	0,96	42,07	6,04
350	38	39	92	38	59,25	4,63	24,56	0,98	41,90	5,61
400	41	42	111	48	63,03	4,63	27,34	1,09	45,18	5,72
450	43	44	129	52	65,51	4,58	26,48	1,05	46,00	5,63
500	46	47	159	75	73,41	4,92	34,71	1,38	54,06	6,30
550	49	50	176	76	74,65	4,83	32,31	1,29	53,48	6,12
600	52	53	193	87	75,87	4,77	34,27	1,36	55,07	6,13
650	56	58	201	102	73,89	4,52	37,64	1,50	55,77	6,02

Messreihe 2

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	28	29	43	11	66,76	8,90	17,22	0,69	41,99	9,59
200	30	31	69	24	78,04	8,41	27,31	1,09	52,67	9,50
250	34	35	68	25	61,46	5,77	22,71	0,91	42,08	6,68
300	35	36	95	35	70,99	6,00	26,26	1,05	48,63	7,04
350	38	39	109	44	70,20	5,49	28,44	1,13	49,32	6,62
400	40	41	129	55	73,02	5,36	31,23	1,24	52,13	6,61
450	44	44	140	59	71,29	4,99	30,04	1,20	50,67	6,18
500	46	47	162	68	74,79	5,01	31,47	1,25	53,13	6,27
550	49	50	178	76	75,50	4,89	32,31	1,29	53,90	6,17
600	52	53	193	81	75,87	4,77	31,91	1,27	53,89	6,03
650	55	55	204	91	74,85	4,58	33,39	1,33	54,12	5,91

Messreihe 3

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	26	28	41	6	62,59	8,25	9,32	0,37	35,95	8,63
200	32	33	56	13	64,13	6,96	14,98	0,60	39,55	7,56
250	33	35	70	19	62,96	5,90	17,26	0,69	40,11	6,59
300	36	38	99	34	74,28	6,29	25,72	1,03	50,00	7,31
350	40	41	115	37	74,58	5,85	24,08	0,96	49,33	6,81
400	42	45	129	43	73,47	5,41	24,72	0,98	49,09	6,39
450	46	48	145	48	74,24	5,20	24,71	0,98	49,48	6,19
500	49	50	164	58	76,28	5,13	27,04	1,08	51,66	6,20
550	52	53	177	67	75,59	4,90	28,68	1,14	52,13	6,04
600	54	55	192	75	75,79	4,77	29,67	1,18	52,73	5,95
650	58	58	208	89	76,76	4,70	32,85	1,31	54,81	6,01

Messreihe 4

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{\text{gem}}$	$\delta(S_A-S_B)_{\text{gem}}$
150	25	26	53	17	80,24	10,52	25,95	1,04	53,10	11,56
200	30	31	65	27	73,51	7,92	30,73	1,23	52,12	9,15
250	32	33	88	36	78,76	7,36	32,38	1,29	55,57	8,65
300	34	36	111	41	82,61	6,97	30,76	1,23	56,69	8,19
350	37	38	134	56	86,00	6,71	36,06	1,44	61,03	8,15
400	41	42	149	57	84,60	6,22	32,46	1,29	58,53	7,51
450	43	44	163	65	82,78	5,78	33,10	1,32	57,94	7,10
500	45	46	185	65	85,20	5,71	30,01	1,19	57,60	6,90
550	48	49	200	75	84,64	5,47	31,81	1,27	58,23	6,74
600	50	52	215	79	84,16	5,28	31,05	1,23	57,61	6,51
650	54	55	221	85	80,93	4,95	31,19	1,24	56,06	6,19

Messreihe 5

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{\text{gem}}$	$\delta(S_A-S_B)_{\text{gem}}$
150	31	32	42	15	66,91	9,07	24,11	0,96	45,51	10,03
200	32	33	64	25	73,29	7,95	28,81	1,15	51,05	9,10
250	34	35	94	34	84,96	7,98	30,88	1,23	57,92	9,21
300	36	38	117	44	87,79	7,43	33,28	1,33	60,53	8,76
350	39	40	129	53	83,37	6,53	34,37	1,37	58,87	7,90
400	42	44	153	58	87,14	6,41	33,24	1,32	60,19	7,74
450	45	45	166	62	84,76	5,93	31,66	1,26	58,21	7,19
500	47	58	179	59	82,84	5,56	28,07	1,12	55,45	6,67
550	43	45	187	71	78,26	5,05	29,85	1,19	54,05	6,23
600	47	49	219	84	85,20	5,34	32,81	1,30	59,01	6,64
650	53	55	226	84	82,61	5,05	30,82	1,23	56,71	6,27

Messreihe 6

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{\text{gem}}$	$\delta(S_A-S_B)_{\text{gem}}$
150	26	28	42	13	64,12	8,45	20,03	0,80	42,07	9,25
200	30	31	54	20	61,07	6,58	22,42	0,90	41,75	7,48
250	32	32	64	24	57,37	5,36	21,57	0,86	39,47	6,22
300	34	36	91	33	68,02	5,74	24,99	1,00	46,50	6,73
350	38	40	109	40	69,94	5,47	25,81	1,03	47,88	6,50
400	42	44	132	42	75,41	5,55	23,95	0,95	49,68	6,50
450	45	46	140	61	71,49	5,00	31,13	1,24	51,31	6,24
500	47	48	160	67	73,86	4,96	30,95	1,23	52,41	6,19
550	50	51	171	64	72,78	4,71	27,31	1,09	50,05	5,80
600	53	54	183	80	72,05	4,53	31,46	1,25	51,75	5,78
650	55	57	201	90	73,64	4,51	33,19	1,32	53,41	5,83

Messreihe 7

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{\text{gem}}$	$\delta(S_A-S_B)_{\text{gem}}$
150	32	33	34	14	54,64	7,45	23,18	0,93	38,91	8,38
200	33	33	52	24	59,46	6,48	27,08	1,08	43,27	7,56
250	34	35	64	31	57,94	5,44	27,88	1,11	42,91	6,55
300	37	38	91	37	68,18	5,78	27,91	1,11	48,05	6,89
350	39	40	102	44	65,79	5,15	28,60	1,14	47,19	6,29
400	41	45	122	50	69,33	5,10	28,74	1,14	49,03	6,24
450	47	48	150	57	76,81	5,39	29,40	1,17	53,10	6,56
500	49	50	155	77	72,09	4,84	35,76	1,42	53,93	6,27
550	51	52	170	84	72,48	4,70	36,04	1,43	54,26	6,13
600	53	53	188	95	74,05	4,65	37,30	1,48	55,68	6,14
650	55	56	205	112	75,33	4,61	40,99	1,63	58,16	6,24

Kombination Kupfer - Nickel-Chrom-Stahl

Messreihe 1

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{\text{gem}}$	$\delta(S_A-S_B)_{\text{gem}}$
150	34	35	6,0	0,5	19,35	6,19	1,63	3,32	10,49	9,51
200	38	40	5,0	0,9	12,60	4,09	2,30	2,65	7,45	6,75
250	41	46	6,0	2,4	12,69	3,49	5,24	2,39	8,96	5,88
300	47	47	6,0	2,0	11,32	3,00	3,77	2,04	7,55	5,03
350	50	51	9,0	2,7	15,33	3,09	4,62	1,89	9,98	4,98
400	53	54	9,0	4,5	14,13	2,76	7,09	1,86	10,61	4,62
450	58	60	12,0	5,0	17,74	2,90	7,45	1,78	12,60	4,68
500	64	66	14,0	4,0	19,75	2,92	5,68	1,64	12,72	4,56
550	67	69	17,0	6,0	22,84	3,02	8,11	1,67	15,47	4,69
600	71	73	16,0	6,0	20,66	2,75	7,79	1,60	14,23	4,36
650	76	77	17,0	6,0	21,26	2,71	7,52	1,55	14,39	4,26

Messreihe 2

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{\text{gem}}$	$\delta(S_A-S_B)_{\text{gem}}$
150	33	34	4,0	1,0	12,77	5,14	3,23	3,35	8,00	8,49
200	34	35	5,0	2,0	12,22	3,95	4,93	2,66	8,58	6,61
250	35	36	5,6	2,5	11,41	3,26	5,13	2,25	8,27	5,51
300	37	38	7,0	4,1	12,54	3,00	7,38	2,09	9,96	5,09
350	40	42	9,7	4,3	15,80	3,04	7,07	1,92	11,43	4,96
400	43	44	10,4	5,5	15,69	2,82	8,33	1,84	12,01	4,66
450	47	48	11,7	6,6	16,63	2,74	9,41	1,80	13,02	4,54
500	50	51	14,0	6,7	18,86	2,78	9,06	1,71	13,96	4,48
550	55	56	16,0	6,8	20,72	2,81	8,83	1,65	14,78	4,45
600	58	59	17,3	7,0	21,54	2,76	8,74	1,59	15,14	4,35
650	60	62	17,5	7,8	20,99	2,63	9,41	1,58	15,20	4,21

Messreihe 3

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	28	29	5,5	1,3	16,70	5,52	3,99	3,22	10,34	8,74
200	34	36	7,0	2,4	17,11	4,55	5,96	2,72	11,54	7,27
250	39	40	8,4	3,6	17,55	3,98	7,57	2,40	12,56	6,38
300	42	43	10,0	3,8	18,39	3,62	7,02	2,13	12,70	5,75
350	46	48	11,6	4,3	19,41	3,41	7,26	1,97	13,33	5,39
400	49	52	11,9	4,8	18,38	3,09	7,51	1,86	12,94	4,95
450	54	56	13,7	5,3	19,97	3,05	7,78	1,77	13,87	4,82
500	58	59	14,7	6,5	20,33	2,93	9,02	1,74	14,68	4,67
550	61	62	16,8	7,0	22,16	2,94	9,26	1,69	15,71	4,63
600	64	66	17,5	7,1	22,16	2,83	9,04	1,63	15,60	4,46
650	67	68	18,0	8,1	21,99	2,73	9,92	1,61	15,96	4,34

Messreihe 4

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	41	40	4,8	0,9	16,67	6,13	3,09	3,56	9,88	9,68
200	40	40	6,9	1,7	17,67	4,78	4,35	2,73	11,01	7,51
250	40	42	8,1	2,4	17,02	3,94	5,11	2,33	11,07	6,27
300	44	46	10,6	4,0	19,69	3,78	7,51	2,17	13,60	5,95
350	48	49	11,7	4,2	19,75	3,46	7,12	1,98	13,44	5,44
400	51	52	12,5	4,4	19,47	3,20	6,88	1,83	13,17	5,03
450	54	56	12,6	4,4	18,36	2,92	6,46	1,72	12,41	4,64
500	57	60	14,9	6,9	20,54	2,94	9,61	1,77	15,07	4,71
550	61	62	17,0	7,0	22,42	2,96	9,26	1,69	15,84	4,65
600	64	65	16,5	7,4	20,89	2,74	9,40	1,64	15,14	4,38
650	67	69	18,6	8,1	22,72	2,78	9,95	1,62	16,33	4,40

Messreihe 5

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	23	25	4,8	0,0	13,88	4,91	0,03	2,95	6,95	7,86
200	27	29	6,2	0,2	14,39	4,06	0,47	2,37	7,43	6,43
250	30	34	6,3	0,0	12,46	3,30	0,02	2,03	6,24	5,32
300	35	37	6,8	1,1	12,06	2,93	1,97	1,87	7,01	4,80
350	39	40	7,6	1,0	12,32	2,72	1,63	1,69	6,97	4,41
400	42	43	8,9	1,2	13,37	2,62	1,81	1,58	7,59	4,20
450	45	47	10,9	2,6	15,38	2,63	3,69	1,57	9,54	4,19
500	49	50	13,8	3,3	18,53	2,75	4,45	1,52	11,49	4,27
550	51	52	13,8	3,3	17,66	2,57	4,24	1,45	10,95	4,02
600	54	58	14,8	4,1	18,22	2,51	5,10	1,45	11,66	3,96
650	58	59	15,5	5,2	18,50	2,46	6,22	1,44	12,36	3,90

Messreihe 6

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	27	30	4,5	0,2	13,53	5,01	0,62	3,12	7,07	8,13
200	31	33	5,6	0,2	13,39	4,03	0,49	2,45	6,94	6,47
250	34	36	7,1	1,0	14,38	3,56	2,05	2,13	8,22	5,69
300	36	37	7,3	2,0	13,01	3,04	3,58	1,93	8,30	4,97
350	38	40	9,0	2,3	14,53	2,91	3,75	1,78	9,14	4,68
400	41	43	11,4	2,3	17,06	2,92	3,47	1,64	10,26	4,56
450	44	46	11,9	3,5	16,73	2,73	4,96	1,61	10,84	4,34
500	47	48	12,0	5,8	16,01	2,55	7,76	1,64	11,89	4,19
550	50	51	14,9	7,0	19,01	2,66	8,96	1,63	13,99	4,29
600	53	54	17,0	7,5	20,87	2,70	9,23	1,59	15,05	4,29
650	58	59	19,1	8,2	22,79	2,75	9,81	1,58	16,30	4,33

Messreihe 7

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	27	28	4,1	0,0	12,32	4,83	0,03	3,04	6,18	7,87
200	29	30	5,3	0,0	12,48	3,87	0,02	2,37	6,25	6,24
250	32	33	5,0	0,0	10,01	3,06	0,02	2,01	5,01	5,08
300	35	36	6,3	2,7	11,17	2,85	4,81	1,97	7,99	4,82
350	39	39	6,3	2,7	10,21	2,53	4,38	1,79	7,30	4,32
400	41	41	7,7	3,0	11,52	2,46	4,49	1,67	8,00	4,13
450	46	49	9,8	3,9	13,88	2,52	5,58	1,65	9,73	4,17
500	50	50	11,8	3,5	15,90	2,55	4,72	1,53	10,31	4,08
550	52	53	13,9	4,9	17,84	2,58	6,31	1,54	12,08	4,12
600	54	56	15,2	5,1	18,71	2,55	6,31	1,49	12,51	4,03
650	58	59	18,9	6,4	22,56	2,73	7,66	1,50	15,11	4,23

Messreihe 8

T_o in °C	$T_{u,1}$ in °C	$T_{u,2}$ in °C	I_1 in mA	I_2 in mA	$(S_A-S_B)_1$	$\delta(S_A-S_B)_1$	$(S_A-S_B)_2$	$\delta(S_A-S_B)_2$	$(S_A-S_B)_{gem}$	$\delta(S_A-S_B)_{gem}$
150	30	31	3,9	0,0	12,08	4,91	0,03	3,13	6,05	8,04
200	32	33	3,4	0,9	8,19	3,41	2,18	2,51	5,19	5,92
250	35	36	5,7	1,3	11,62	3,28	2,67	2,16	7,14	5,44
300	37	37	6,5	1,3	11,65	2,91	2,33	1,88	6,99	4,80
350	40	42	6,7	2,7	10,91	2,60	4,44	1,82	7,67	4,42
400	44	48	9,8	4,4	14,84	2,76	6,77	1,81	10,80	4,56
450	49	50	10,3	3,1	14,74	2,60	4,45	1,61	9,60	4,21
500	50	51	10,3	3,1	13,88	2,40	4,19	1,52	9,03	3,92
550	53	54	13,3	4,0	17,12	2,53	5,17	1,49	11,14	4,03
600	55	57	13,5	4,9	16,67	2,41	6,08	1,48	11,38	3,89
650	58	59	15,4	4,5	18,38	2,45	5,38	1,41	11,88	3,86