

# **Beobachtung der Brownschen Molekularbewegung**

**nach dem Drehspiegelexperiment  
von Eugen Kappler**

Philipp Krauspe, Paul Pfeiffer  
& Claudio Michaelis

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen zur Brownschen Molekularbewegung</b>	<b>3</b>
2.1	Gleichverteilungssatz . . . . .	5
2.2	Folgerungen und Anwendungen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Grundlagen zur Messaparatur</b>	<b>7</b>
3.1	Prinzip des Versuchsaufbaus . . . . .	8
3.2	Vorteile der langsamen Messung . . . . .	9
3.3	Laser . . . . .	10
3.4	Das Torsionsmoment des Fadens und seine Bestimmung . . . . .	11
3.5	Detektion . . . . .	13
3.6	Bestimmung des Direktionsmoments . . . . .	14
3.7	Bestimmung der mittleren Schwankungsquadrate mit CCD-Chip . . . . .	15
3.8	Linsen . . . . .	15
3.9	Kapplers Versuchsaufbau . . . . .	17
3.10	Unser Versuchsaufbau & Durchführung . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Messung &amp; Auswertung</b>	<b>20</b>
4.1	Bestimmung des Direktionsmoments der Haare . . . . .	20
4.2	Abschätzung zur Messbarkeit der Winkelfluktuationen . . . . .	22
4.3	Bestimmung der Winkelfluktuationen . . . . .	23
4.4	Abschätzung des Einflusses von Intensitätsschwankungen des Lasers . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>27</b>
5.1	Matlab-Programm . . . . .	27

# 1 Einleitung

In unserem Projektpraktikum wollten wir, das Drehspiegelexperiment Eugen Kapplers rekonstruieren und zur Überprüfung die Boltzmannkonstante  $k_B$  zu messen.

Eugen Kappler wollte mit seinem Versuch eine Bestätigung der Theorie zur Brownschen Molekularbewegung liefern, indem er sie in einem gebundenen System präzise untersucht hat.

Wichtig war Kappler insbesondere eine genaue Bestimmung von  $k_B$ , da die vorher durchgeführten Experimente teils leicht von einander abweichende Ergebnisse hervorgebracht haben.

## 2 Grundlagen zur Brownschen Molekularbewegung

Die Brownsche Molekularbewegung wurde 1827 von Robert Brown entdeckt, der mikroskopische, in einer Flüssigkeit schwimmende Teilchen beobachtete. Brown selbst gibt allerdings an, dass schon vor ihm Forscher das auf das Phänomen aufmerksam geworden wären, zum Beispiel Leeuwenhoek um 1650 herum, durch Browns Publikationen wurde ihr jedoch erstmals größere Aufmerksamkeit zuteil. Allerdings wurde erst 50 Jahre später die Heutzutage geläufige Erklärung des Phänomens, dass die Bewegung durch Stöße mit umliegenden, sich durch ihre thermische Energie bewegende Moleküle verursacht wird, in den Arbeiten von Delsaulx und Carbonelle vollständig formuliert und noch einmal weitere 30 Jahre später durch Einstein (1905) und Smoluchowski (1906) experimentell bestätigt. Durch ihre Messungen des mittleren Verschiebungsquadrates konnten quantitative Messwerte untersucht werden, zuvor waren nur qualitative Aussagen möglich.

Die Brownsche Bewegung kann auf zwei Arten beschrieben werden, zum einen durch den Gleichverteilungssatz, der später auch noch aus der Hamiltonschen Physik hergeleitet werden soll, und die Beschreibung über eine Bewegungsgleichung.

Der Gleichverteilungssatz hat folgende Form:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (1)$$

Diese Formel konnte empirisch mit Messungen an freien Teilchen bestätigt werden. Legt man den Ansatz der Anregung durch die umliegenden Moleküle zu Grunde kann man diese Formel dahingehend verallgemeinern, dass sie von der Anzahl der Freiheitsgrade

f eines Teilchens abhängt:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{f}{2} kT \quad (2)$$

Alternativ stellte folgende Kräftegleichung für Brownsche Teilchen auf:

$$m\dot{v} = -\mu v + F(t) \quad (3)$$

Es treten hierbei sowohl die Reibungskraft  $-\mu v$ , als auch die Kraft durch die Brownsche Bewegung  $F(t)$  auf, wobei sich die Brownsche Kraft schnell ändert im Vergleich zur Teilchengeschwindigkeit und im zeitlichen Mittel 0 ergibt. Nimmt man an, dass die makroskopische Bewegung sehr klein ist, kann der Reibungsterm vernachlässigt werden und man erhält für das mittlere Geschwindigkeitsquadrat den aus dem Gleichverteilungssatz ermittelten Wert.

Historisch war die Brownsche Molekularbewegung ein wichtiger Schritt zur Akzeptanz der Atomhypothese. Ein Körper (egal welchen Ausmaßes und welcher Masse) wird von den ihn umgebenden Molekülen angestoßen und bewegt sich dadurch geringfügig, in zufällige Richtungen. Die Kraftübertragung über Stöße war dabei nur möglich, wenn man die Existenz von Atomen voraussetzt. Wärme wird heute allgemein als Teilchenbewegung gedeutet und über die aus dem Gleichverteilungssatz hergeleitete Formel definiert.

Nichtsdestotrotz ist es für den Gleichverteilungssatz vollkommen irrelevant, auf welche Art und Weise die Energie übertragen wird, Stöße mit den umliegenden Molekülen sind nur eine Möglichkeit, auch Strahlung kann diese Schwankungen auslösen. Das zeigt ein Gedankenexperiment recht schnell, auf Grund des Gleichverteilungssatzes der in jedem Medium gilt, müssen immer Energieschwankungen auftreten. In einem Vakuum ist dies jedoch scheinbar unmöglich. Da die Schwankung allerdings von der Dichte des umgebenden Gases vollkommen unabhängig ist, und ein Sprung auf dem Weg zum totalen Vakuum der theoretischen Vorhersage widerspricht, muss auch anderweitig Energie mit zufälligen Schwankungen übertragen werden, zum Beispiel durch elektromagnetische Wellen, die leichten Intensitätsschwankungen unterliegen, so dass zeitlich unterschiedlich viele Photonen auftreten.

Allerdings kann gezeigt werden, dass das Medium in dem die größte Reibungskraft herrscht auch den größten Einfluss hat. Ein Teilchen erfährt in einem Gas oder einer Flüssigkeit eine gut messbare Reibung, in einem Lichtstrahl ist diese jedoch kaum messbar und könnte vermutlich nur in einem perfekten Vakuum nachgewiesen werden.

In Kapplers Versuchsaufbau wird mit einem System mit nur einem Freiheitsgrad (Torsion des Fadens) gearbeitet.

## 2.1 Gleichverteilungssatz

Eine wichtige mathematische Möglichkeit zur Herleitung der empirisch bestimmten Formel für die Korrelation von Energie und Temperatur stellt der Gleichverteilungssatz dar. Aus der hamiltonschen Mechanik und den Grundlagen der statistischen Mechanik lässt sich folgende Gleichung folgern:

$$\left\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle = Z^{-1} \int d\Gamma x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} e^{-\beta H} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{Z\beta} \int d\Gamma x_i \frac{\partial e^{-\beta H}}{\partial x_j} = kT \delta_{ij} \quad (5)$$

Hier bei wird der Mittelwert des Ausdrucks

$$x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (6)$$

mit  $x_i = p_i, q_i$  betrachtet. Das Integral über  $\Gamma$  bezeichnet eine Integration über die Phasenraumvariablen  $p$  &  $q$ .  $Z$  ist die Zustandssumme des Systems, ein Normierungsfaktor,  $\beta = (kT)^{-1}$  ist eine Abkürzung. Es gilt

$$\langle 2E_{kin} \rangle = \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\rangle = \left\langle \sum_i p_i \dot{q}_i \right\rangle \quad (7)$$

Setzt man dies in den Gleichverteilungssatz ein erhält man den Virialsatz:

$$\left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\rangle = kT \delta_{ij} \quad (8)$$

Vergleicht man nun die Gleichung von vorher mit dem Virialsatz, sieht man die Übereinstimmung. Alternativ kann man für ein Mehrteilchensystem (mit  $N$  Teilchen) das Äquipartitionstheorem anwenden:

$$\left\langle \sum_{i=1}^f p_i \frac{\partial H}{\partial p_j} \right\rangle = fNkT \delta_{ij} \quad (9)$$

Der Gleichverteilungssatz besagt also, dass jedes Teilchen pro Freiheitsgrad  $f$  genau die oben definierte Energie  $\langle E \rangle = \frac{f}{2}kT$  besitzt.

Interessant ist dann die Anzahl der Freiheitsgrade. Einesseits kann diese wie in unserem Versuch durch die äußeren Gegebenheiten (z.B. eine raumfeste Rotationsachse) beschränkt sein. Allerdings kann man für normale Atomare Gase feststellen, dass ihre Energie 3 Freiheitsgraden entspricht, auch wenn sie eigentlich 6 Freiheitsgrade (3 aus der Rotation,

3 aus der Translation) haben. Das lässt sich quantenmechanisch begründen, da der Drehimpuls quantisiert ist. Da der Radius der Atome sehr klein ist, braucht es sehr viel Energie um den Drehimpuls zu erhöhen, weshalb quasi nur die 3 Translationsfreiheitsgrade angeregt werden.

Der Gleichverteilungssatz gilt jedoch mit kleinen Einschränkungen.

Die Energieaufnahme der Moleküle erfolgt quantisiert, so dass unterhalb einer gewissen, für jedes Molekül charakteristischen Energiemenge gar keine Bewegung oder keine Bewegung in Richtung eines Freiheitsgrades stattfindet. Ist nun  $\frac{kT}{2}$  klein gegenüber diesem "Mindestquantum" an Energie, gilt er nicht. Dies entspricht dem bereits oben beschriebenen Effekt bei atomaren Gasen, wurde hier allerdings nochmal erwähnt, um die Voraussetzungen mathematisch möglichst exakt aufzuzählen.

Des Weiteren muss die Boltzmannsche Statistik erfüllt sein, die einige weitere Voraussetzungen statistischer Art enthält.

Gelten diese Voraussetzungen ist der Satz, wie hier gezeigt und auch oben bereits erwähnt vollkommen allgemein, insbesondere im Hinblick auf die Umgebung und Beschaffenheit des untersuchten Objektes.

**Das Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsgesetz** besagt, dass der Gleichverteilungssatz unabhängig von der potentiellen Lageenergie ( $V(r)$ ) gilt, da die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Energie in  $E = E_{kin} + E_{pot}$  proportional zu folgender Exponentialfunktion ist:

$$e^{-\frac{E}{kT}} = e^{-\frac{E_{kin} + E_{pot}}{kT}} \quad (10)$$

Daran lässt sich leicht erkennen, dass die potentielle Energie einfach als Faktor abgespalten werden kann, und die kinetische Energie, die aus der Brownschen Bewegung kommt nicht beeinflusst.

## 2.2 Folgerungen und Anwendungen

Die Brownsche Molekularbewegung hat aber als grundlegendes Modell einige über die reine Theorie und praktische Messung hinausgehende Bedeutungen gewonnen.

Zum einen ergab sich durch die Brownsche Bewegung eine erste Begrenzung der Messgenauigkeit, diese Grenze wurde teilweise bei Galvanometern schon vorher erreicht, konnte aber durch die Brownsche Bewegung erklärt werden. Allgemein kann die (Mess-)Empfindlichkeit  $E$  eines analogen Messgerätes dargestellt werden als das Verhältnis vom Zeigerausschlag pro Messeinheit (Kraft die wirkt um einen gewissen Ausschlag zu erreichen)  $B$  zur Direktionskraft  $D$  der Feder:

$$E = \frac{B}{D} \quad (11)$$

Für die Unsicherheit des Zeigerausschlags  $z$  durch die Brownsche Bewegung gilt dann:

$$\overline{z^2} = \frac{kTD}{B^2} \quad (12)$$

Auf den ersten Blick scheint dabei erstaunlich, dass eine geringere Direktionskraft die Unsicherheit verringert, allerdings wächst die Empfindlichkeit umgekehrt proportional zu  $D$ , während die Schwankungen nur proportional zu  $\sqrt{D}$  zunehmen.

Außerdem kann präziser gemessen werden, indem über einen längeren Zeitraum oder immer wieder in größeren Zeitabständen (im Vergleich zur Geschwindigkeitsänderung durch die Molekularbewegung) gemessen wird. Theoretisch lässt sich allerdings auch so noch eine beliebige Messgenauigkeit erreichen, auch wenn das praktisch äußerst schwierig und nur bei sehr geringen Temperaturen realisierbar oder eben sehr zeitaufwändig wäre. Erst die heisenbergsche Unschärferelation sagte auch eine theoretische Grenze für die Messgenauigkeit voraus.

Weiterhin findet die Brownsche Bewegung Anwendung in der Finanzökonomie, speziell bei Aktienkursen, deren stetigen geringfügigen Schwankungen teilweise mit ähnlichen Modellen simuliert werden. Auch dort haben diese Schwankungen meist wenig mit den Makroökonomischen Gegebenheiten zu tun, sondern rühren von kleinen Geschäften her, die stetig statistisch verteilt passieren, wie eben bei einem Körper, der ohne eine Veränderung des makroskopischen Zustands trotzdem ein wenig um die Ruhelage oder Ausgangsbahn wackelt.

### 3 Grundlagen zur Messapparatur

Da sie zuerst auf mikroskopischer Skala entdeckt wurde, wurden auch zuerst Versuche unternommen, die Brownsche Bewegung an kleinen Teilchen, also möglichst molekularer oder atomarer Ebene zu messen. Die Beobachtungen der Bewegung von kleinen Partikeln durch F. Exner im Jahre 1900 hat dann auch zu den ersten Ergebnissen geführt, allerdings waren diese um einen Faktor 10 kleiner, als später durch Einstein, Smoluchowsky und eben auch Kappler gemessen. Dies lag daran, dass die beobachteten Teilchen pro Sekunde  $10^7$  Richtungsänderungen vornehmen. Dies ist allerdings mit bloßem Auge nicht wahrnehmbar, so dass Exner nur einen kleinen Teil all dieser Bewegungen messen konnte.

Über die Umrechnung der Boltzmannschen Konstante  $k$  (oft mit  $k_B$  bezeichnet) in die Gaskonstante  $R$  die das um die Avogadro-Konstante  $N_A$  vielfache angibt, also eine molare anstatt einer molekularen Größe ist, lassen sich auch makroskopische Versuche durchführen. Dazu mussten allerdings mit Hilfe weiterer Versuche sowohl  $R$ , als auch

$N_A$  möglichst präzise bestimmt werden. Dies wirkt sich natürlich negativ auf die Genauigkeit aus.

Der neue Ansatz Kapplers war, dass er einen makroskopischen Körper beobachtete, dass sich auf Grund des Gleichverteilungssatzes bezüglich der Molekularbewegung genau so verhält wie ein mikroskopisches Teilchen. Der von Kappler verwendete Drehspiegel erhält durch die Brownsche Bewegung die selbe Energie  $\frac{f}{2}kT$  pro Freiheitsgrad, wie ein sehr viel kleineres Teilchen. Durch seine große Masse bewegt er sich jedoch deutlich träger, und die Ausschläge werden zeitlich auflösbar und somit präzise messbar.

### 3.1 Prinzip des Versuchsaufbaus

Im Versuch soll die Brownsche Molekularbewegung über die Auslenkung eines drehbar gelagerten Spiegels aus der Ruhelage untersucht werden. Die Bewegung wird dabei über einen Laser gemessen, der durch die Drehung des Spiegels abgelenkt und auf einer Kamera registriert wird.

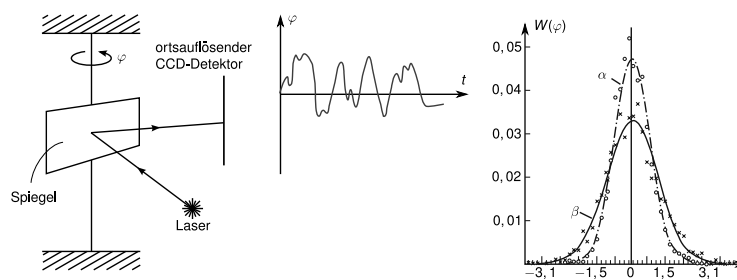


Abbildung 1: Darstellungen zum Aufbau und Prinzip des Versuches

**Die potentielle Energie** der Drehung hängt ab vom Direktions-/Torsionsmoment des Fadens  $D$  und dem Quadrat der Auslenkung  $\phi$  und wird durch folgende Formel beschrieben:

$$E_{pot} = \frac{D}{2}\phi^2 \quad (13)$$

**Die thermische Energie des Spiegels** ist für das System des Spiegels mit einem Freiheitsgrad ( $f=1$ ) wie oben hergeleitet und beschrieben gegeben durch:

$$E_{Brwon} = \frac{1}{2}kT \quad (14)$$



Setzt man beide Energien gleich und beachtet man, dass die brownische Energie durch Mittelung entsteht ergibt sich folgende für den Versuch zentrale Formel:

$$E_{pot} = \frac{D}{2} \langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{2} kT = E_{Brown} \quad (15)$$

Wenn man das Direktionsmoment des Fadens kennt, kann man über eine Messung der Temperatur und der Mittleren Auslenkung  $\langle \phi \rangle$  die Boltzmannkonstante  $k$  bestimmen. Nun wollen wir uns den verschiedenen Elementen und Eigenheiten des Versuchsaufbaus widmen.

### 3.2 Vorteile der langsamen Messung

Beim Drehspiegelexperiment schlägt das System recht langsam aus (im Bereich von Sekunden, bei mikroskopischen Partikeln ändert sich die Richtung ca.  $10^7$  mal pro Sekunde), somit kann die Bewegung als glatte Kurve (Abb.2) dargestellt und die Geschwindigkeit direkt gemessen werden, indem jeweils die Tangente an die Kurve angelegt wird, und die Geschwindigkeit auf dem Film in Auslenkung des Spiegels umgerechnet wird. Dies bietet eine weitere Möglichkeit der Überprüfung der Theorie.

Außerdem können bewegte Systeme (mit anfänglicher Auslenkung) gemessen werden. Durch Vergleiche mit den Theoriekurven lässt sich wieder der Einfluss der durch die molekularebewegung auftretenden Kraft ermitteln. Dies war ebenfalls wichtig um die auf der Kräftegleichung beruhende Theorie zu überprüfen.

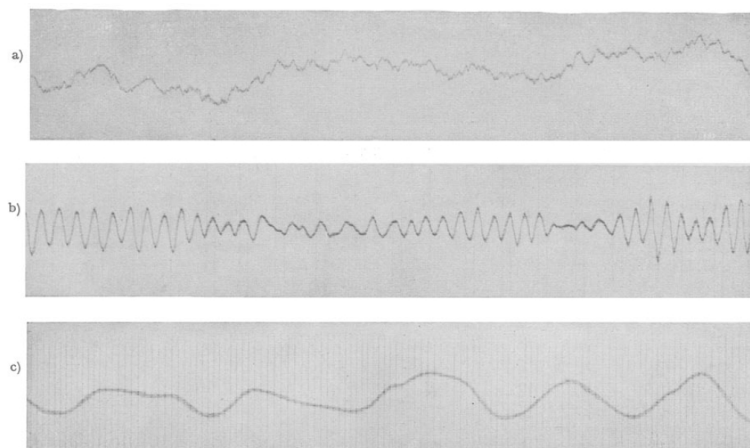


Abbildung 2: Messkurven aus Kapplers Versuchen bei unterschiedlichen Laufgeschwindigkeiten des Films

Auch wenn der Luftdruck nichts an der mittleren Auslenkung ändert, beeinflusst er doch ganz entscheidend das Aussehen der Bewegungskurve des brownischen Teilchens. Je größer der Luftdruck ist, desto mehr Kollisionen finden statt, so dass das System über einen längeren Zeitraum ausgelenkt werden kann. Ist der Druck nur gering, wird sich das System meist recht schnell wieder in die Ausgangslage begeben, da es weniger stark durch Reibung und weitere unregelmäßige Stöße beeinflusst wird. Die mittlere Auslenkung bleibt jedoch gleich.

### 3.3 Laser

Im Laser wird Licht durch stimulierte Emission erzeugt. Dazu werden Atome auf einen metastabilen Zustand angeregt. Kommt ein Photon mit passender Wellenlänge vorbei kann es zu stimulierter Emission kommen, die die Strahlung verstärkt. Das Atom kehrt durch die stimulierte Emission wieder in den Grundzustand zurück und muss über einen Pumpvorgang (als das Zufügen von Energie) erneut angeregt werden, um wieder ein Photon durch stimulierte Emission abgeben zu können.

Das entstehende Licht wird über zwei Spiegel immer wieder hin und her geworfen, so dass Resonanz auftreten und den Effekt verstärken kann. Ein Teil des Lichtes wird an einem der Spiegel ausgekoppelt und kann verwendet werden.

Laserlicht ist perfekt für den Versuch, da es gut gebündelt auch über lange Strecken intensiv ist und sehr einfach mit Hilfe eines einzelnen Polarisationsfilters gedimmt werden kann. Die Vorteile bzw. Eigenschaften eines Laser sind insbesondere folgende:

**Monochromatisches Licht** Das Laserlicht hat einen sehr kleinen Frequenzbereich, in vielen Fällen ist dieser so klein, dass das Licht als monochromatisch, also nur aus einer Wellenlänge bestehend angenommen werden kann.

**Kohärenz** Laserlicht hat zudem gute Kohärenzeigenschaften. So können Kohärenzlängen im Kilometerbereich erreicht werden. Spezielle He-Ne-Laser können Kohärenzlängen von  $10^5$  km erreichen.

**Leistung** Laser können sehr hohe Leistungen erreichen ( $10^5$  W im Dauerbetrieb und bis zu  $10^{10}$  W für Puls laser).

**Bündelung** Die hohen Leistungen lassen sich durch starke Bündelung von Laserstrahlen zur Erzeugung sehr hoher Intensitäten, oder für eine sehr hohe Strahlreichweite nutzen. Wenn Laserlicht gut gebündelt ist, ist der Intensitätsverlust über große Strecken sehr viel geringer, als bei klassischem “Glühlampen-Licht”

**Parallelität** Bei gebündelten Strahlen sorgt die hohe Parallelität von Laserstrahlen für die geringen Verlusten über große Strecken, da der Strahl kaum zerläuft, sondern alle Strahlen nahezu parallel verlaufen.

**Polarisation** Das Licht des Lasers ist sofort polarisiert, weshalb bereits ein Polarisationsfilter zum Dimmen genügt.

**Leistungsschwankungen** Die Leistung eines Lasers ist allerdings zeitlich nicht konstant, auch die besten Laser unterliegen leichten Leistungsschwankungen, die im Bereich von einigen Promill bis ca. 2% liegen.

### 3.4 Das Torsionsmoment des Fadens und seine Bestimmung

Das wichtigste und zugleich technisch am schwierigsten handhabbare Element des Versuchsaufbaus ist ein sehr sehr dünner Quarzfaden mit einem äußerst geringen Direktionsmoment. Zu den Schwierigkeiten in der Handhabung kommen wir jedoch später noch, zu erst soll theoretisch betrachtet werden, wie das Direktionsmoment bestimmt werden kann. Möglich ist dies über die Betrachtung einer Schwingung mit einem am Faden angebrachten Objekt mit bekanntem Trägheitsmoment. Die Dauer der Schwingung und ihre Dämpfung ermöglichen es auf das Direktionsmoment zurückzuschließen. Deshalb soll die Torsionsschwingung kurz behandelt werden:

**Die Torsionsschwingung** (idealisiert ohne Reibung) eines Körpers (Dichte  $\rho$  Abmessungen  $V$ ) mit einem Trägheitsmoment  $J$ , der an einem Faden mit Direktionsmoment  $D$  hängt, wird durch folgende DGL beschrieben:

$$J\ddot{\phi} = D\phi \quad (16)$$

Dabei gibt  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers an,  $\phi$  den Winkel und  $D$  das Direktionsmoment des Fadens. Dies lässt sich mit Hilfe einer komplexen Exponentialfunktion  $e^{i\omega t}$  lösen, so dass sich durch einsetzen und umformen folgendes ergibt:

$$D = \frac{4\pi^2 J}{t^2} = J\omega^2 \quad (17)$$

Das Trägheitsmoment eines Körpers lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$J = \int_V \rho r^2 dV \quad (18)$$

**Die Gaußsche Methode** zur Bestimmung des Direktionsmomentes erlaubt es durch die Messung der Torsionsschwingung eines Fadens mit zwei unterschiedlichen Trägheitsmomenten sofort, das Direktionsmoment des Fadens zu errechnen, obwohl mit dem Spiegel ein zusätzlicher, uns unbekannter Faktor  $J_s$  das Trägheitsmoment beeinflusst. Indem man die Ergebnisse beider Messungen vergleicht lässt sich folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} D &= (J_1 + J_s) \omega_1^2 \\ D &= (J_2 + J_s) \omega_2^2 \end{aligned}$$

Dies ist ein System aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte und somit eindeutig lösbar. Das Trägheitsmoment des Spiegels beträgt dann:

$$J_s = \frac{J_2 \omega_2^2 - J_1 \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (19)$$

Setzt man dies in eine der Gleichungen ein erhält man für das Direktionsmoment des Fadens:

$$D = \omega_1^2 \left( \frac{J_2 \omega_2^2 - J_1 \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} + J_1 \right) \quad (20)$$

**Das Direktionsmoment** lässt sich bei Kenntnis der entsprechenden Materialkonstante auch direkt aus der Dicke des Fadens  $d$ , der Länge  $l$  und dem materialabhängigen Torsionsmodul  $\mu_T$  berechnen. Somit kann das deutlich genauere (da für den speziellen Faden feststellbare, die Dicke des Fadens kann nicht einzeln gemessen werden) obige Verfahren grob überprüft werden:

$$D_{mat} = \frac{\pi}{2} \mu_T \frac{d^4}{16l} \quad (21)$$

Des weiteren wird man sehen, dass unsere Entscheidung auf Grund der einfacheren Handhabung einen dünneren Faden zu nehmen leider die Messungen stärker erschwert hat, als angenommen. Dies war uns allerdings zum Zeitpunkt der Messung noch nicht klar.

**Die Energie** die im Faden bei der Torsion gespeichert wird hängt quadratisch von der Auslenkung ab (analog zum Hookschen Gesetz der Feder):

$$E = \frac{D}{2} \phi^2 \quad (22)$$

### 3.5 Detektion

Gemessen wird der Laserstrahl mittels eines CCD-Chips. Dazu werden längere Aufnahmen gemacht, die anschließend mittels entsprechender Software ausgewertet werden, um den Schwerpunkt des Laserstrahls zeitlich zu verfolgen. Um die Auslenkung eindeutig bestimmen zu können, sollten Linsen im Strahlengang hinter dem Spiegel möglichst vermieden werden, da sie erheblich komplexere Berechnungen nötig machen würden, um die Auslenkung abzulesen.

**CCD-Chips** CCD-Chips bestehen im wesentlichen aus einem dotierten Halbleiterblock, über dem, durch einen Isolator getrennt, Optisch transparente Elektroden gitterförmig angebracht sind. Diese Elektroden stellen die Pixel dar, je größer sie sind, desto besser ist die Lichtausbeute des Chips, je kleiner die Elektroden sind, desto besser ist die Auflösung. Zu unserem Leidwesen werden in handelsüblichen Webcams Chips mit einer relativ ausgewogenen Konfiguration verbaut, dies verringert jedoch in unserem Fall die Messgenauigkeit stark, da wir problemlos hohe Lichtintensitäten erzeugen konnten, aber eine hohe Auflösung benötigt hätten.

Die Funktionsweise ist folgende. Das auf den CCD-Chip fallende Licht passiert die Elektroden und löst in dem dotierten Halbleiterblock (die dotierung sorgt für die passende Leitfähigkeit) Elektronen (verschiebt sie ins Leitungsband) und Löcher (Stellen an denen Elektronen fehlen) aus. Diese Werden durch die Elektroden in einem Potentialtopf gesammelt. Zur Auswertung werden sie nach und nach von einer Elektrode zur nächsten verschoben, bis sie zum Messverstärker gelangen, wo das Signal ausgewertet und auf den entsprechenden Gitterplatz übertragen wird.

### 3.6 Bestimmung des Direktionsmoments

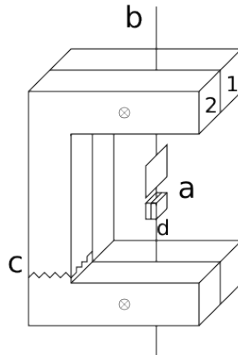


Abbildung 3: Skizze zur Halterung und Torsionsfaden mit zusätzlichem Trägheitsmoment (d)

Die Bestimmung des Direktionsmoments basiert auf mehreren Messungen mit verschiedenen Trägheitsmomenten. Durch das zusätzliche Anbringen von bekannten Trägheitsmomenten (in diesem Fall Quader aus Kunststoff) lässt sich mithilfe der Gaußschen Methode das Direktionsmoment bestimmen. Dabei misst man die Periodendauer  $T$  für jedes Set von bekanntem Trägheitsmoment und ermittelt daraus das Direktionsmoment  $D$ . Aufgrund der großen Periodendauer ist die Schwingung mit dem bloßen Auge gut sichtbar. Auf einem Schirm, der einige Meter vom Spiegel entfernt ist, kann man den Lichtpunkt gut verfolgen und die Periodendauer bestimmen.

Nach Messungen mit einem  $\frac{1}{10}$  mm-Dicken Quarzfaden ergibt sich ein Direktionsmoment welches um einige Größenordnungen über dem Kappler's liegt. Als Torsionsfaden, der mit bloßen Händen präpariert werden kann und einen Spiegel halten kann, werden Haare genutzt. Da auch Haare gleicher Personen nicht zwangsläufig identisch sind, wird für jedes Haar das Direktionsmoment einzeln bestimmt. Dieses liegt noch deutlich über dem Direktionsmoment des Quarzfadens, den Kappler verwendete (Er spricht von einigen  $\mu$ -Dicke)

### 3.7 Bestimmung der mittleren Schwankungsquadrate mit CCD-Chip

Die Messung der mittleren Schwankungsquadrate erfolgt prinzipiell identisch, statt einem Schirm nutzt man den CCD-Chip; der reflektierte Laserstrahl wird durch Polarisationsfilter gedimmt auf den CCD-Chip gelenkt. Mit diesem nimmt man ein Video auf. Zur Bestimmung der Schwankungsquadrate lässt man mittels Videoanalysesoftware (*Viana*) den Schwerpunkt und dessen  $x$ - $y$ -Koordinaten auslesen. Für die Bestimmung von  $k_B$  ist nur die  $x$ -Komponente und die Varianz von Bedeutung. Aus der Entfernung von Spiegel zu CCD-Chip und der Auslenkung auf dem Chip lässt sich das mittlere Schwankungsquadrat  $\Delta\varphi$  bestimmen.

Da die Apparatur sehr empfindlich ist, werden alle Messungen unter Vermeidung äußerer Erschütterung wie bspw. Schritten durchgeführt. Die Messdauer ist dabei so groß wie möglich zu wählen und der auszuwertende Zeitbereich in der Mitte der Aufnahme zu wählen um Einschwingvorgang und Erschütterung durch Starten und Beenden der Aufnahme zu vernachlässigen. Der CCD-Chip nimmt mit der größtmöglichen Anzahl von Bildern pro Sekunde (max. 30, wohingegen das Datenblatt der Kamera 60 angibt. Der Kundenservice von Philips konnte nicht erklären woher die Angabe der 60 Bilder pro Sekunde kommt) Filmsequenzen auf.

### 3.8 Linsen

Um möglichst gut auslesen zu können haben wir zeitweise das Licht mit Hilfe von Linsen gebündelt. Linsen funktionieren über die Lichtbrechung, für die das snelliussche Brechungsgesetz gilt:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (23)$$

$n_1$  und  $n_2$  sind die Brechungsindizes der beiden Materialien,  $\alpha_1$  ist der einfallswinkel-,  $\alpha_2$  der Ausfallswinkel. Überlagert man zwei Kugeln erhält man eine Linse (Abb. 4&5) Die Linsengleichung (für dünne Linsen) lautet:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (24)$$

$f$  ist die Brennweite der Linse, während  $g$  die Gegenstandsweite und  $b$  die Bildweite angeben. Mit Hilfe einer Linse lässt sich so Licht auf einen Punkt bündeln.

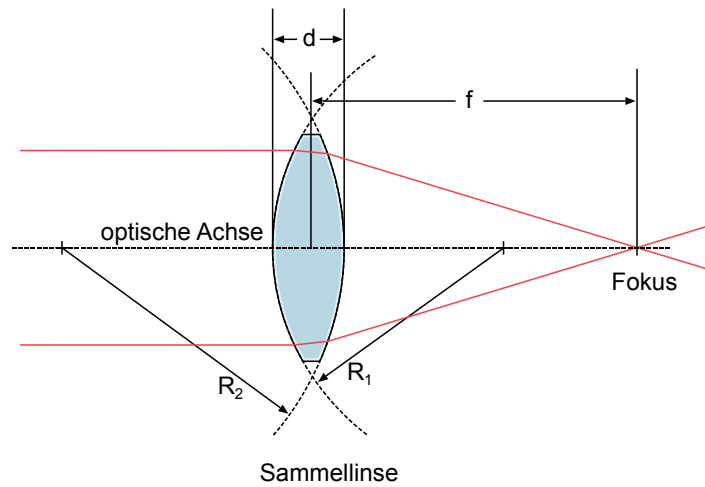


Abbildung 4: Sammellinse

Allerdings verändert die Bündelung des Lichtstrahls natürlich den Auslenkungsweg, eine Errechnung der realen Auslenkung wäre extrem kompliziert geworden.

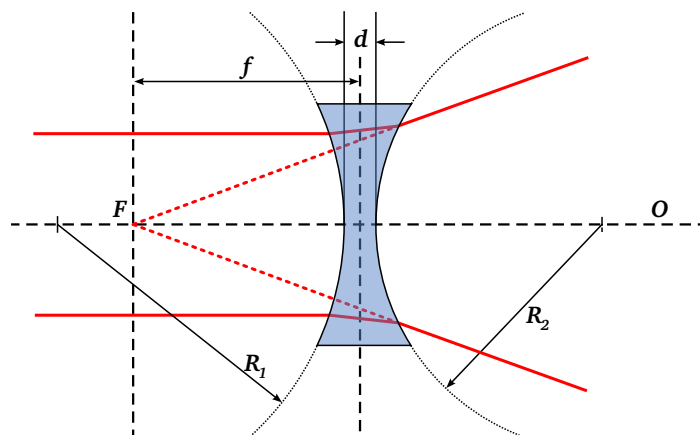


Abbildung 5: Streulinse

Ein anderer Ansatz war, über eine Konvexe Linse zu bündeln, um es danach mit Hilfe einer konkaven Linse wieder so weit zu zerstreuen, dass ein schmalere, paralleler Strahl entsteht. Das Problem dabei ist allerdings, dass die Linsen dazu einen sehr exakten Abstand haben müssen. Außerdem franst der Strahl bei einer feinen Bündelung weiter



auf, da bei einer Erhöhung der Ortsschärfe auf Grund der Heisenbergschen Unschärferelation eine größere Impulsunschärfe auftreten muss. Diese hat bei den entsprechenden Größenordnungen durchaus Einfluss auf das Ergebnis.

Hier stellt allerdings das monochromatische Laserlicht einen enormen Vorteil dar, da keine chromatische Aberration durch die Wellenlängenabhängige Brechzahl  $n(\omega)$  (Dispersion) auftritt.

### 3.9 Kapplers Versuchsaufbau

Kappler erwähnt in seiner Arbeit folgende Konfigurationen. Leider war es uns nicht möglich ähnliche Werte zu erreichen.

1.  $D = 9,428 \cdot 10^{-9} \text{ dyn cm}$   
 $J = 10^{-7} \text{ g qcm}$   
 $d = 72,1 \text{ cm}$   
 $T = 13^\circ$   
 $p = \text{ca. } 1 \text{ Bar}$
2.  $D = 9,428 \cdot 10^{-9} \text{ dyn cm}$   
 $J = 10^{-7} \text{ g qcm}$   
 $d = 72,1 \text{ cm}$   
 $T = 13^\circ$   
 $p = 10^{-4} \text{ mm/Hg}$
3.  $D = 3,978 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}$   
 $J = 2,35 \cdot 10^{-7} \text{ g qcm}$   
 $d = 234,3 \text{ cm}$   
 $T = 22^\circ$   
 $p \approx 0,05 \text{ mm Hg}$

(D=Direktionskraft, J=Trägheitsmoment, d=Abstand Spiegel-Kamera, T=Temperatur, p=Druck) Kappler erhält mit seiner besten Messung für k einen Wert von  $1,37 \cdot 10^{-16} \text{ erg/Grad}$  bei einem Fehler von ca. 1/1000

### 3.10 Unser Versuchsaufbau & Durchführung

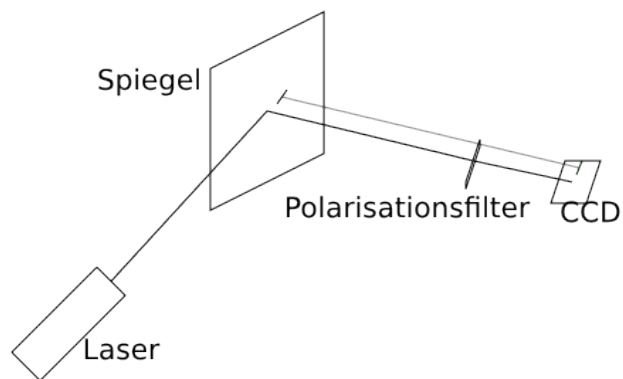


Abbildung 6: Skizze zum Versuchsaufbau

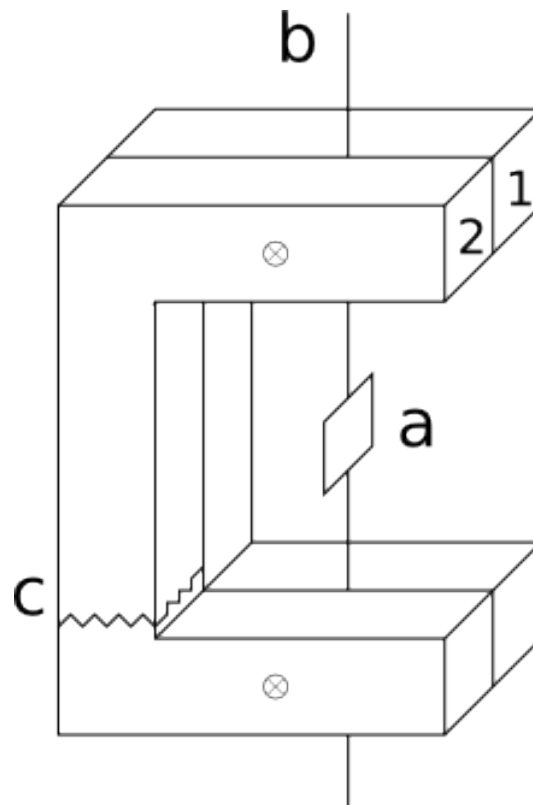


Abbildung 7: Skizze zur Halterung und Torsionsfaden ohne zusätzliche Trägheitsmomente

Beim Versuchsaufbau handelt es sich um eine Drehwaage: Zwei U-Profile (Siehe Abb 7) aus Aluminium (1 & 2) fixieren den Torsionsdraht (b), sodass dieser nur noch einen Freiheitsgrad, die Drehung besitzt. Um diese Drehung aufzuzeichnen, wird mit einem Laser auf den Spiegel (a) geleuchtet und die Reflexion mit einem CCD-Chip aufgenommen. In den Strahlengang führt man zum Schutz des CCD-Chips Polarisationsfilter ein um die Intensität des Laserlichtes zu reduzieren. Mit Flügelmuttern presst man beide U-Profile zusammen um den Torsionsdraht zu fixieren. Um während dieses Vorgangs den Draht spannen zu können, wird ein U-Profil in zwei Teile geteilt (c). Für alle Versuchsteile gilt derselbe Versuchsablauf:

1. Herstellen einer Probe, bestehend aus Torsionsdraht und Siliziumspiegel, dabei ist es wichtig den Spiegel zentral anzubringen, dass der Draht keinen 'Knick' bekommt. (Für die Messung des Direktionsmoments zusätzliche Gewichte anbringen)
2. Fixierung des Torsionsdrahts mit der ersten Flügelmutter
3. Spannen des Drahts

Konfiguration	Masse[g]	Länge[mm]	Breite[mm]	Trägheitsmoment [kg m <sup>2</sup> ]
1	1	8,2	8,3	$1,13 \cdot 10^{-8}$
2	2	16,4	8,3	$5,63 \cdot 10^{-8}$
3	3	24,5	8,3	$16,9 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 1: Daten der Trägheitsmomente zur Bestimmung des Direktionsmoments

4. Fixierung des Torsionsdrahts mit der zweiten Flügelmutter, dabei ist es wichtig zwischen Halterung und Torsionsdraht rechte Winkel einzuhalten, da sonst das Direktionsmoment variiert (Dieses ist abhängig von Länge, Dicke und Material des benutzten Torsionsdrahts).

## 4 Messung & Auswertung

Bevor hier im Detail die Ergebnisse der Messungen vorgestellt werden, wird ein kurzes Fazit vorangestellt: mit dem im Grundlagenteil vorgestellten Aufbau ist uns keine Messung der Boltzmann-Konstante gelungen. Nachdem die Direktionsmomente der Haare bestimmt waren und um mehrere Größenordnungen über denen der von Kappler verwendeten Quarzfäden lagen, brachte uns eine Abschätzung die Einsicht das mit unserem Aufbau die thermischen Fluktuationen nicht nachweisbar sein sollten. Diese Nullmessung hätte uns immerhin eine obere Grenze für die Boltzmann-Konstante gegeben. Allerdings ergaben unsere Versuche deutliche Schwankungen mit Werten für die beteiligte Energien die Größenordnungen über denen der thermischen Fluktuationen lagen. Da es nun in diesem Versuch vor allem um die beteiligten Größenordnungen und Verbesserungsmethoden des Versuchsaufbaus geht, wird auf detaillierte Fehlerrechnung größtenteils verzichtet.

### 4.1 Bestimmung des Direktionsmoments der Haare

Die Periodendauer der harmonischen Schwingung der Trägheitsmomente am Torsionsfaden wurde über die Bewegung der Laserreflexion an einer etwa 5m entfernten Wand bestimmt, sodass auch sehr kleine Auslenkungen noch messbar waren, die einerseits Voraussetzung für die harmonische Schwingung sind, andererseits den Einfluss von Reibung minimieren.

Es wurde die Newtonsche Methode genutzt (siehe Grundlagenteil) und die Trägheitsmomentkonfigurationen waren Quader aus PVC mit den folgenden Kenndaten:

Mit jeweils zwei der Konfigurationen wurden nun dreimal über 10 Perioden die Periodendauer vermessen.

Kennzeichnung	$\bar{T}_1$ [s]	$\bar{T}_2$ [s]	$\bar{T}_3$ [s]
I1	1,09	2,29	-
II1	1,16	2	-
II2	1,32	-	6,05
III1	0,7	1,98	-
IV	1,95	3,47	-

Tabelle 2: Mittlere Periodendauer verschiedenerer Trägheitsmomentkonfigurationen, entsprechend dem Index i:  $\bar{T}_i$ , Kennzeichnungen s.u.

Kennzeichnung	Direktionsmoment[Nm]	Trägheitsmoment Spiegel [kg m <sup>2</sup> ]
I1	$4,4 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-9}$
II1	$6,7 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$
II2	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$-3 \cdot 10^{-9}$
III1	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$-5 \cdot 10^{-9}$
IV	$2,1 \cdot 10^{-7}$	$-9 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 3: Direktionsmomente verschiedener Haare

Anschließend wurde mit den Mittelwerten über Formel(??) das Direktionsmoment des Haares und das Trägheitsmoment des Spiegels bestimmt. Dabei wurden dünne Haare von blonden Personen genutzt. Eigentlich war uns durch unsere Einspannvorrichtung eine gewisse Länge vorgegeben, aber um den Einfluss der Länge auf das Direktionsmoment jedenfalls einmal qualitativ zu überprüfen, wurden zwei Spannvorrichtungen an einem langen Stab befestigt, sodass ein Haar von etwa 2,5 facher Länge untersucht werden konnte. Die Haare wurden dabei mit der römischen Ziffer passend zu ihrer Spannvorrichtung (I-III, IV als Vorrichtung zur Untersuchung des langen Haares) und einer lateinischen Zahl benannt.

Es fällt auf, dass man aus dem direkten Vergleich der Tabelle mit den Periodendauern eine andere Ordnung in der Tabelle mit den Direktionsmomenten erwarten würde, so hat das lange Haar deutlich längere Periodendauern als die anderen Haare, aber nur das zweitniedrigste Direktionsmoment, allerdings spielt in unserem Genauigkeitsbereich Reibung eine solch große Rolle, dass es eine Rolle spielt welche Konfiguration benutzt wurde, vor allem Konfiguration 3 hat eine große Reibungsfläche, und welche Form der Spiegel hat. Dies ließ sich, da die Spiegelchen aus einem großen Stück Silicium Waver gebrochen wurden, nur schwer kontrollieren. Den Einfluss der Reibung sieht man auch in den zum Teil 'negativen' Werte für das Trägheitsmoments des Spiegels.

Um eine Größenordnung für die Direktionsmomente der Spiegel zu erhalten, alle im Bereich von  $10^{-7}$ Nm, war der der Versuchsaufbau durchaus geeignet. Für eine exakte

Messung sollte der Einfluss der Reibung beachtet werden, dafür bietet es sich an kleine Schwingungen auf dem CCD zu betrachten und aus dem Abklingen über eine Schwingungsperiode den Dämpfungskoeffizient zu ermitteln.

## 4.2 Abschätzung zur Messbarkeit der Winkelfluktuationen

Da im Vergleich zu den von Kappler verwendeten Quarzfäden die Haare ein etwa 7 Größenordnungen größeres Direktionsmoment haben, werden die thermischen Fluktuation erheblich kleiner. Ob diese mit dem verwendeten Aufbau noch messbar sind, soll die folgende Abschätzung zeigen. Die vom Versuchsaufbau vorgegebenen Größen sind:

- Direktionsmoment des Torsionsfadens:  $D \approx 10^{-7} Nm$
- Temperatur als Raumtemperatur:  $T \approx 300K$
- Pixelgröße auf dem CCD-Chip:  $\Delta x_{min} \approx 5\mu m$
- Strecke Spiegel-CCD, konnte mit Spiegeln auf etwa 10 m verlängert werden:  $s \approx 10m$

die mittlere Auslenkung auf dem CCD-Chip ist durch  $\Delta \bar{x} = s \cdot \Delta \bar{\phi}$  gegeben, was wegen  $\Delta \bar{\phi} = \sqrt{\frac{k_B \cdot T}{D}}$  mit der Boltzmann-Konstante im Bereich von etwa  $10^{-23} \frac{J}{K}$  auf folgende Abschätzung führt:

$$\Delta \bar{x} = s \cdot \sqrt{\frac{k_B \cdot T}{D}} \approx 2\mu m \quad (25)$$

Damit gilt  $\Delta x_{min} > \Delta \bar{x}$  und es sollten durchschnittliche Winkelfluktuationen im CCD im Bereich von max. einer Pixelposition gemessen werden.

Man sieht aus dieser Abschätzung auch, dass das Direktionsmoment der einzige wirkliche Angriffspunkt im Versuchsaufbau ist, an dem angesetzt werden kann um mehr Sensitivität zu erreichen. Eine Änderung der Strecke Spiegel-CCD ist kaum noch um eine ganze Größenordnung zu erreichen, Temperaturenänderung im Bereich einer Größenordnung lassen sich nur mit sehr großem Aufwand bewerkstelligen und handelsübliche CCD-Chips haben Pixelgrößen im Bereich von Mikrometern, damit bleibt nur das Direktionsmoment, wo es nach den Angaben von Eugen Kappler noch einen größeren Gestaltungsbereich gibt.

### 4.3 Bestimmung der Winkelfluktuationen

Entgegen unserer Erwartung aus der obigen Abschätzung beobachteten wir aber Winkelfluktuationen, die sogar mit dem bloßen Auge sichtbar waren. Um eine quantitative Aussage über die beteiligten Energie zu bekommen, wurden die vom CCD-Chip aufgenommenen Sequenzen mit dem Video-Analyse-Programm VIANA analysiert und die entstandenen Datenreihen mit einem selbstgeschriebenen MATLAB-Programm (siehe Anhang) untersucht. Wir haben dabei um äußere Einflüsse zu minimieren Videoaufnahmen über 10 min gemacht und dabei den mittleren Teil untersucht. Längere Aufnahmen waren wegen Speicherbeschränkungen leider nicht möglich und auch das von uns zur Analyse genutzte Programm konnte mit größeren Datenmenge nicht umgehen. Aus den Datenreihen suchten wir uns manuelle möglichst lange Teile aus ohne Analyse-Fehler, da bei manchen Bildern die Erkennung des Strahlenflecks auf dem Video vom Programm nicht funktionierte.

Am Ende als auswertbar stellten sich Messungen mit den Haaren I1 und II2 heraus, Haar IV hatten wir wegen dem größeren Versuchsaufbauaufwand gestrichen.

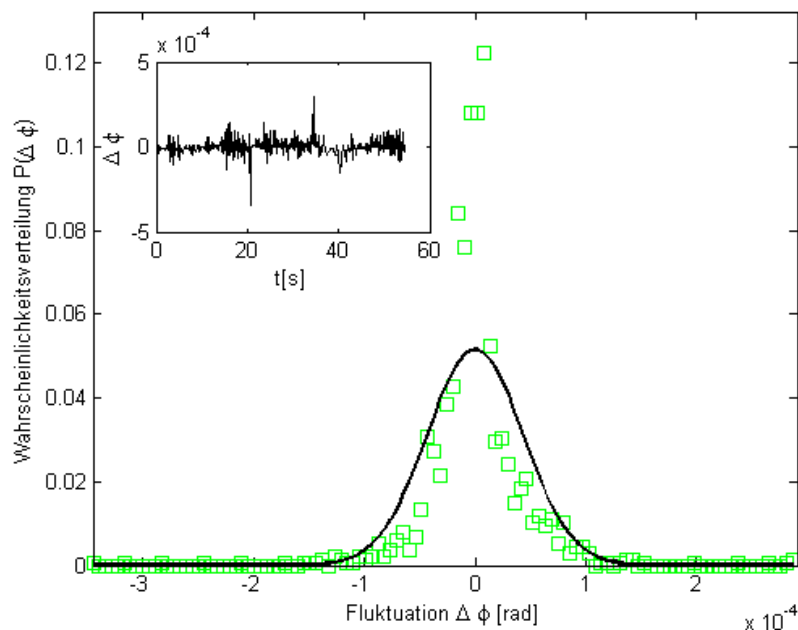


Abbildung 8: Matlab-Analyse einer Messung der Winkelfluktuationen des Haars II2 über 60 sec bei einer Entfernung von 323cm mit einer mittleren Winkelfluktuation von  $4,3 \cdot 10^{-5}$  rad und damit einer mittleren Energie  $\bar{E}=1,7 \cdot 10^{-16}$  Joule

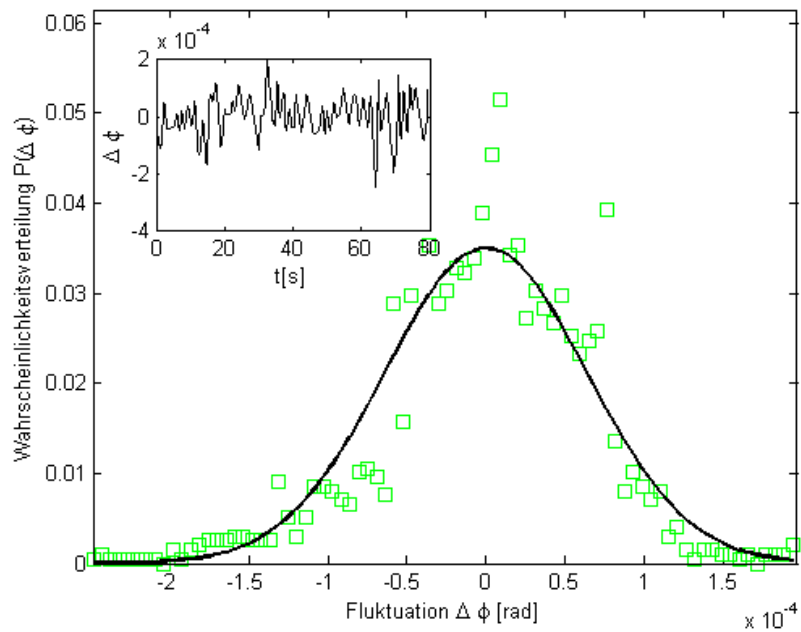


Abbildung 9: Matlab-Analyse einer Messung der Winkelfluktuationen des Haars I1 über 80 sec bei einer Entfernung von 48cm mit einer mittleren Winkelfluktuation von  $6,4 \cdot 10^{-5}$  rad und damit einer mittleren Energie  $\bar{E}=8,5 \cdot 10^{-16}$  Joule



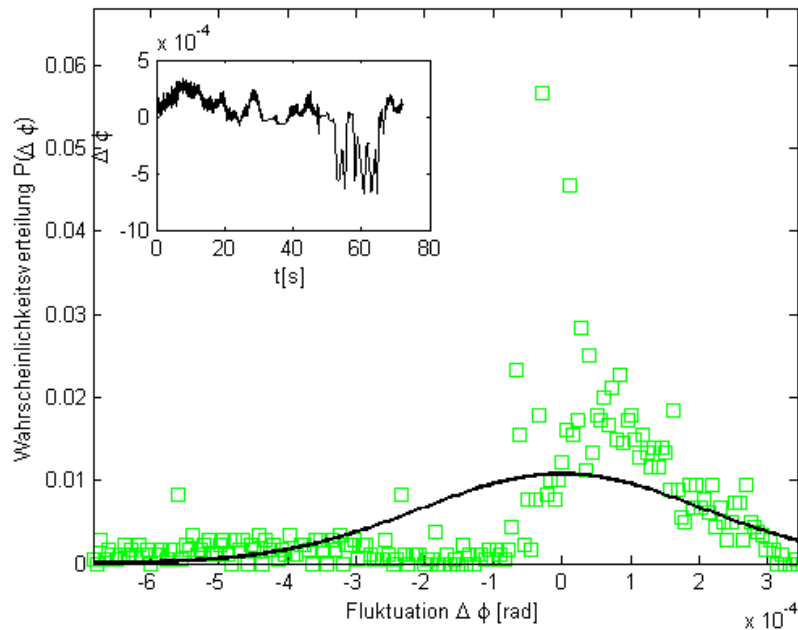


Abbildung 10: Matlab-Analyse einer Messung der Winkelfluktuationen des Haars II über 72 sec bei einer Entfernung von 48cm mit einer mittleren Winkelfluktuation von  $20 \cdot 10^{-5}$  rad und damit einer mittleren Energie  $\bar{E}=94 \cdot 10^{-16}$  Joule

Hier noch eine Anmerkung: Die Messungen mit dem Haar II hatten leider ein Problem, die Fluktuationen überlagerten einen konstanten Linksdrift des Strahls, obwohl wir eine Stunde warteten und auch das Haar noch einmal aus der Lagerung entfernten und es versuchten ohne zusätzliche Spannungen zu befestigen, war dieser Drift weiter beobachtbar. Um die Fluktuationen trotzdem messen zu können, bereiteten wir die Daten vorher auf. Wir nahmen eine Mittelung über die ersten hundert und die letzten hundert Pixelpositionen vor und ermittelten dadurch eine mittlere Driftgeschwindigkeit, die wir anschließend mit der jeweiligen Zeit multiplizierten und zu der entsprechenden Pixelposition dazurechneten. Dadurch wurde die Driftgeschwindigkeit herausgerechnet.

Es werden also Winkelfluktuationen im Bereich von  $10^{-5}$ - $10^{-6}$  rad gemessen, die damit auf beteiligte Energien im Bereich von  $10^{-15}$  bis zu  $10^{-14}$  Joule hinweisen. Diese liegen damit 6 bis 7 Größenordnungen über der thermischen Energie bei Raumtemperatur. Ob diese Ergebnisse wirklich in dieser Größenordnung liegen, könnte man zum Beispiel durch Verwenden einer anderen Bildanalyse-Software überprüfen und mit den Ergebnissen von VIANA zu vergleichen. Aber sogar wenn sich dadurch das Ergebnis im Bereich von einer Größenordnung ändern sollte, so lassen sich die Winkelfluktuationen nicht mit der

thermischen Energie erklären und es müssen weitere äußere Einflüsse wie Erschütterungen und Luftzirkulation zu Erklärung herangezogen werden, die man durch einen stoßsicheren Aufbau, der durch einer Plexiglasbox vor Luftzirkulation geschützt ist, minimieren. Allerdings heißt das auch, dass Torsionsfäden mit einem geringeren Direktionsmoment erst einmal keinen Vorteil gebracht hätten, da die thermische Brownsche Bewegung auch hier von den äußeren Einflüssen überdeckt worden wäre und ohne einen verbesserten Versuchsaufbau nicht messbar gewesen wäre.

#### 4.4 Abschätzung des Einflusses von Intensitätsschwankungen des Lasers

Bei den Überlegungen zu äußeren Einflüssen wurde auch der Laser einbezogen. Zwar wurde versucht den Laserstrahl möglichst zentriert um die Rotationsachse auf den Spiegel zu richten, allerdings ist dies ja einer gewissen Ungenauigkeit unterworfen. Eine asymmetrische Bestrahlung des Lasers ist nun aber nicht weiter schlimm, da sich dadurch nur eine neue Ruheposition ergibt. Schwankt allerdings die Intensität des Lasers bei einer asymmetrischen Bestrahlung, so führt dies zu einem Impulsübertrag und damit zu einem Drehmoment. Im folgenden soll abgeschätzt werden, welche Intensitätsschwankungen nötig wären um die im Versuch beobachteten Auslenkungen zu erklären.

Dafür wird ein senkrechter asymmetrischer Einfall eines Strahls mit einem Durchmesser von etwa 1,5 mm auf den Spiegel an einem Torsionsfaden mit dem Direktionsmoment  $D$  angenommen. Nun spielt auch bei einer Intensitätsschwankungen nur der asymmetrische Teil des Strahls eine Rolle, für die Rechnung wählen wir eine Fläche  $A$  bei einem Abstand von der Achse bezeichnet durch  $d$ . Zur Berechnung des Impulsübertrags wird das Licht als Photonenstrom mit der Wellenlänge  $\lambda$  betrachtet.

Eine Schwankung  $\Delta I$  zieht eine Schwankung des Photonenstroms (Anzahl von Photonen pro Fläche und Zeit) der Größe  $\frac{\Delta N}{A \cdot dt} = \frac{\Delta I}{h \cdot \nu}$  nach sich. Die dadurch wirkende Kraft ist nun wellenlängenunabhängig und hat die Form:

$$F = \frac{p}{dt} = \frac{\Delta N}{A \cdot dt} \cdot A \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{\Delta I \cdot A}{c}$$

Damit ergibt sich ein Drehmoment  $|M| = |\vec{d} \times \vec{F}| = d \cdot F =$ , sodass sich in Näherung bei  $\varphi_{max} = \frac{r \cdot \Delta I \cdot A}{D \cdot c}$  ein Gleichgewicht einstellt. Damit ergeben sich die zur Erklärung der beobachteten Winkelfluktuationen nötigen Intensitätsschwankungen bei einer Annahme von etwa einem fünftel der bestrahlten Fläche als  $A$ , einem Abstand von der Achse  $d \approx 0,3 \text{ mm}$  und den Werten für Direktionsmoment und mittlerer Auslenkung aus dem

Versuch als:

$$\Delta I = \frac{D \cdot \varphi_{max} \cdot c}{d \cdot A} \approx \frac{5 \cdot 10^{-7} \text{Nm} \cdot 8 \cdot 10^{-5} \text{rad} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}}{0,3 \text{mm} \cdot 0,2 \cdot (0,75 \text{mm})^2 \cdot \pi} = 113 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

Dies ist bei dem von uns benutzten Laser mit einer Leistung im Milliwattbereich auszuschließen und damit können die Winkelfluktuationen nicht durch die Schwankungen der Intensität des Lasers erklärt werden.

## 5 Anhang

### 5.1 Matlab-Programm

Das Matlab-Programm bekommt einen einfachen Datensatz, bestehend aus den Zeitpunkten und den zugehörigen Pixelpositionen in horizontaler Richtung. Für diese Pixelpositionen werden der arithmetische Mittelwert und die Standardabweichung ausgerechnet. Anschließend werden diese mit der optischen Weg-Angabe und dem Wert für die Pixelgrößen in Winkelgrößen umgerechnet. Diese werden dann in einem Schaubild neben die zum Mittelwert und der Standardabweichung gehörigen Gausskurve gezeichnet. Um die Natur der Dynamik als stochastische Bewegung darzustellen zeigt ein kleines Fenster den zeitlichen Verlauf der Winkelfluktuationen. Außerdem gibt das Programm den zu der Standardabweichung gehörigen Wert für die Boltzmann-Konstante aus. Aussagekräftiger ist allerdings die mittlere beteiligte Energie.

```
function [kb,deltaphi]=ppausw(filename,D,optW,T,P)
```

```
%ppausw: Programm zum Auswerten einer Aufnahme einer  
Fluktuation aufgenommen in filename mit Direktionsmoment  
D[Nm], optischem Weg optW[m], T[K], P[m]. Ausgabe besteht  
aus zwei Figures, einem zeitlichen Verlauf der Schwankung  
und einem Histogramm mit zugehöriger GAUSS-Kurve, der  
mittleren Abweichung und dem daraus gewonnen Wert für kb
```

```
TXY=load(filename);
```

```
%nun sollte eine n*3 Matrix ausgegeben werden: t x y  
TX=TXY(:,1:2);
```

```
[n,m]=size(TX);
```

```

mx=mean(TX(:,2)); %Mittelwert der Pixelpositionen
sx=std(TX(:,2)); %Standardabweichung der Pixelpositionen

tstart=TX(1,1);
tend=(n-1)*0.04+tstart;
t=tstart:0.04:tend;
TX=TX-[ones(1,n); zeros(1,n)]'*tstart-[zeros(1,n); ones(1,n)]'
                                         *mx;

%t beginnt bei 0, posX mean =0
TX(:,2)=TX(:,2)*P/optW;
%Umrechnung der Pixelpositionen in Winkelpositionen

%Berechnung des Histogramms
phimin=min(TX(:,2));
phimax=max(TX(:,2));
phipos=phimin:P:phimax;
verteilung=(hist(TX(:,2),phipos))/n;
%Verteilung normiert

%Berechnung der Gausskurve
deltaphi=sx*P/optW;
gauss=P/sqrt(2*pi)/deltaphi*exp(-1/2*(phipos/deltaphi).^2);

%Berechnung von kb
kb=D*deltaphi^2/T;
E=1/2*kb*T;

%Erstellung des Histogramms+Gausskurve
figure;
%subplot(1,2,1);
plot(phipos,verteilung,'sg');
hold on;
plot(phipos,gauss,'-k','Linewidth',2);
title(filename);
axis([phimin phimax 0 max(verteilung)+0.01]);
xlabel('Fluktuation \Delta \phi [rad]');
ylabel('Wahrscheinlichkeitsverteilung P(\Delta \phi)');

%Erstellung des zeitlichen Verlaufs

```

```

%subplot(1,2,2);
axes('position',[.2 .6 .3 .25]);
plot(t, TX(:,2),'k');
xlabel('t[s]');
ylabel('\Delta \phi');

```

## Literatur

- [1] Kappler, Eugen: *Die Brownsche Molekularbewegung*, Die Naturwissenschaften 1939 Ausg. 40 & 41
- [2] Demtröder, Wolfgang: *Experimentaphysik 1*, Springer, 1994, 5. Auflage (2008)
- [3] Demtröder, Wolfgang: *Experimentaphysik 2*, Springer, 1995, 2. Auflage (1999)
- [4] Runge, Bernd-Uwe: *AP-Skript online*, Uni-Konstanz, 2005, Auflage WS 2009/10

## Abbildungsverzeichnis

1	Von Michael Bergmann erstellt mit Inkscape . . . . .	8
2	Aus [1] . . . . .	9
3	Skizze zur Halterung und Torsionsfaden mit zusätzlichem Trägheitsmoment (d) . . . . .	14
4	<a href="http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sammellinse.svg&amp;filetimestamp=20100902211045">http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sammellinse.svg&amp;filetimestamp=20100902211045</a> am 29.8.2011	16
5	<a href="http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Negative.lens.svg&amp;filetimestamp=20051114225201">http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Negative.lens.svg&amp;filetimestamp=20051114225201</a> am 29.8.2011 . . . . .	16
6	Skizze zum Versuchsaufbau . . . . .	18
7	Skizze zur Halterung und Torsionsfaden ohne zusätzliche Trägheitsmomente	19
8	Matlab-Analyse einer Messung der Winkelfluktuationen des Haars II2 über 60 sec bei einer Entfernung von 323cm mit einer mittleren Winkelfluktuaton von $4,3 \cdot 10^{-5}$ rad und damit einer mittleren Energie $\bar{E}=1,7 \cdot 10^{-16}$ Joule	23
9	Matlab-Analyse einer Messung der Winkelfluktuationen des Haars II über 80 sec bei einer Entfernung von 48cm mit einer mittleren Winkelfluktuaton von $6,4 \cdot 10^{-5}$ rad und damit einer mittleren Energie $\bar{E}=8,5 \cdot 10^{-16}$ Joule	24

- 10 Matlab-Analyse einer Messung der Winkelfluktuationen des Haars I1 über 72 sec bei einer Entfernung von 48cm mit einer mittleren Winkelfluktuation von  $20 \cdot 10^{-5}$  rad und damit einer mittleren Energie  $\bar{E}=94 \cdot 10^{-16}$  Joule . 25