C. Fehlerrechnung

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.“

— Johann Carl Friedrich Gauss

Eine sehr ausführliche und dabei gut verständliche Darstellung der Fehlerrechnung speziell für die Anwendung in den Naturwissenschaften findet sich im Buch von John R. Taylor [Tay82, Tay88, Tay97]. Leider ist die deutsche Übersetzung [Tay88] des Buches gegenwärtig nicht mehr lieferbar.[1]

C.1 Formeln und Begriffe

Da bei den Formeln zur Fehlerrechnung sehr häufig Summenzeichen auftauchen, werden zur Vereinfachung der Schreibweise die Summationsgrenzen im Folgenden manchmal weggelassen. In diesen Fällen soll die Summation stets von $i = 1$ bis $i = N$ laufen, also

$$\sum \cdots = \sum_{i=1}^{N} \cdots \quad .$$

C.1.1 Schreibweise

$$\text{gemessener Wert} = x_{\text{best}} \pm u(x) \tag{C.1.1}$$

$$\text{relative Unsicherheit} = \frac{u(x)}{|x_{\text{best}}|} \tag{C.1.2}$$

wobei

$$x_{\text{best}} = \text{Bestwert (bester Schätzwert) von } x, \tag{C.1.3}$$

$$u(x) = \text{absolute Messunsicherheit} \geqslant 0 \quad . \tag{C.1.4}$$

[1] Sie steht aber in der Bibliothek der Universität Konstanz zur Verfügung.

C.1.2 Fortpflanzung von Unsicherheiten

Werden mehrere Größen $v,\ldots,w,x\ldots,y$ mit kleinen Unsicherheiten $u(v),\ldots,u(w),u(x)\ldots,u(y)$ gemessen und die Werte zur Berechnung einer Größe q verwendet, so führen die Unsicherheiten von $v,\ldots,y$ zu einer Unsicherheit von q wie folgt:
Ist z die Summe und Differenz $z = v + \ldots + w - (x + \ldots + y)$, so ist

$$u(z) \begin{cases} \approx u(v) + \ldots + u(w) + u(x) + \ldots + u(y) \\ \quad \text{(immer gültig, das ist auch eine obere Grenze für } u(z)\text{)}, \\ = \sqrt{(u(v))^2 + \ldots + (u(w))^2 + (u(x))^2 + \ldots + (u(y))^2} \\ \quad \text{(nur für unabhängige zufällige Abweichungen).} \end{cases} \tag{C.1.5}$$

Ist q das Produkt und der Quotient $z = \frac{v \cdot \ldots \cdot w}{x \cdot \ldots \cdot y}$, so ist

$$\frac{u(z)}{|z|} \begin{cases} \approx \frac{u(v)}{|v|} + \ldots + \frac{u(w)}{|w|} + \frac{u(x)}{|x|} + \ldots + \frac{u(y)}{|y|} \\ \quad \text{(immer gültig, das ist auch eine obere Grenze für } \frac{u(z)}{|z|}\text{)}, \\ = \sqrt{(\frac{u(v)}{|v|})^2 + \ldots + (\frac{u(w)}{|w|})^2 + (\frac{u(x)}{|x|})^2 + \ldots + (\frac{u(y)}{|y|})^2} \\ \quad \text{(nur für unabhängige zufällige Abweichungen).} \end{cases} \tag{C.1.6}$$

Ist $z = A + x$ und weiterhin der Summand A genau bekannt, so ist

$$u(z) = u(x) \quad . \tag{C.1.7}$$

Ist $z = B \cdot x$ und weiterhin der Faktor B genau bekannt, so ist

$$u(z) = B \cdot u(x) \quad . \tag{C.1.8}$$

Ist z eine Potenzfunktion $z(x) = x^n$, so ist

$$\frac{u(z)}{|z|} = |n| \, \frac{u(x)}{|x|} \quad . \tag{C.1.9}$$

Ist z eine beliebige Funktion $z(x)$ einer Variablen x, so ist

$$u(z) = \left| \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \right| \cdot u(x) \quad . \tag{C.1.10}$$

Ist z eine beliebige Funktion $z(v,\ldots,y)$ mehrerer Variablen $v,\ldots,y$, so ist

$$u(z) \begin{cases} \approx \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right| \delta v + \ldots + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| u(y) \\ \quad \text{(immer gültig, das ist auch eine obere Grenze für } u(z)\text{)}, \\ = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial v} u(v))^2 + \ldots + (\frac{\partial z}{\partial y} u(y))^2} \\ \quad \text{(nur für unabhängige zufällige Abweichungen).} \end{cases} \tag{C.1.11}$$

Unter Umständen kann es für die explizite Rechnung allerdings bequemer sein, Gleichung (C.1.11) in leicht modifizierter Form anzuwenden, wenn sich dadurch die Ausdrücke vereinfachen:

$$\frac{u(z)}{z}\begin{cases} \approx \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right| u(v)\cdot\frac{1}{z}+\ldots+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| u(y)\cdot\frac{1}{z} \\ \quad \text{(immer gültig, das ist auch eine obere Grenze für } \frac{u(z)}{z}\text{)}, \\ = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial v}u(v)\cdot\frac{1}{z})^2+\ldots+(\frac{\partial z}{\partial y}u(y)\cdot\frac{1}{z})^2} \\ \quad \text{(nur für unabhängige zufällige Abweichungen).} \end{cases} \tag{C.1.12}$$

C.1.3 Statistische Definitionen

Stehen $x_1,\ldots,x_N$ für N getrennte Messungen einer Größe x, so definieren wir:

$$X := \text{wahrer Wert der Verteilung} \tag{C.1.13}$$

$$\sigma := \text{wahre Breite der Verteilung} \tag{C.1.14}$$

$$\overline{x} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \text{arithmetischer Mittelwert} \tag{C.1.15}$$

$$= \text{bester Schätzwert für den wahren Wert } X$$

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2} \tag{C.1.16}$$

$$= \text{empirische Standardabweichung (}\langle\text{engl.}\rangle\ \textit{standard deviation} = \text{S.D.)}$$

$$= \text{bester Schätzwert für die wahre Breite } \sigma \text{ der Verteilung}$$

$$= \text{mittlerer Fehler einer Einzelmessung}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(N-1)}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2\right)-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2\right]} \tag{C.1.17}$$

(oft nützliche Umformung, die auch von Taschenrechnern benutzt wird)

Für den (eher unrealistischen) Fall, dass der wahre Wert X bekannt ist, erhält man mit der folgenden Formel einen noch genaueren Schätzwert für die Breite σ, der dann mit einiger Vorsicht auch als „Standardabweichung“ bezeichnet werden kann:

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-X)^2} \tag{C.1.18}$$

(korrekt, aber selten hilfreich, da X meist unbekannt ist)

Weiterhin gilt:

$$\sigma_x^2 = \text{Varianz} \tag{C.1.19}$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \text{empirische Standardabweichung des Mittelwerts}^2 \tag{C.1.20}$$

(⟨engl.⟩ *standard error* = S.E.)

$$\frac{\sigma_{\sigma_x}}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{\sigma_{\overline{x}}}}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \tag{C.1.21}$$

= relative Unsicherheit in σ_x bzw. $\sigma_{\overline{x}}$ als Schätzwert für die wahre Breite σ

Anmerkung: Eine gewisse Verwirrung entsteht oft dadurch, dass leider in der Literatur auch immer wieder der Ausdruck $\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2}$ als Standardabweichung bezeichnet wird. Der Ausdruck mit N im Nenner und $\overline{x}$ in der Klammer heißt manchmal auch „Standardabweichung der Grundgesamtheit“, derjenige mit $(N-1)$ im Nenner und $\overline{x}$ in der Klammer „Stichproben-Standardabweichung“.
Seltener verwendet wird der mittlere Abweichungsbetrag (⟨engl.⟩ manchmal etwas irreführend als *average deviation* bezeichnet):

$$\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}|x_i-\overline{x}| \tag{C.1.22}$$

bzw.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i-X| \tag{C.1.23}$$

Außerdem gibt es noch den sog. „wahrscheinlichen Fehler“ P.E. (⟨engl.⟩ *probable error*). Er ist darüber definiert, dass die Wahrscheinlichkeit eines Messwertes, ins Intervall $[X-\text{P.E.}, X+\text{P.E.}]$ zu fallen, gerade 50 % ist. Für eine normalverteilte Messung gilt

$$\text{P.E.} \approx 0.674 \cdot \sigma \tag{C.1.24}$$

Einige Autoren geben diesen Fehler gerne an, nicht zuletzt, weil er etwas kleiner ist als die Standardabweichung σ, so dass die Messwerte „genauer aussehen“. Trotzdem wird die Standardabweichung ihrer einfachen mathematischen Eigenschaften wegen am häufigsten verwendet, so dass es empfehlenswert ist, die Verwendung von P.E. explizit zu erwähnen.

[2] Dieser Wert ist der beste Schätzwert für die Standardabweichung der Verteilung des Mittelwertes und wird manchmal auch *fälschlicherweise* als „empirischer Standardfehler des Mittelwerts“ bezeichnet ([fNB95] Seite 34).

C.1.3.0.1 Definition der Verteilungsfunktion: Sei Z eine Zufallsgröße. Als Verteilungsfunktion $F(z)$ der Zufallsgröße Z bezeichnet man die Funktion $F(z) = P(Z < z)$. Der Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle z ist also gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße einen Wert annimmt, der kleiner als z ist.
Eine Zufallsgröße heißt stetig, wenn sich ihre Verteilungsfunktion in folgender Weise darstellen lässt:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)\mathrm{d}x \quad . \tag{C.1.25}$$

Die Funktion $f(x)$ heißt Dichte der Verteilung.
Für jede Grenzverteilung $f(x)$ der Messwerte einer stetigen Variablen x gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = &\text{ Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Messwertes,} \\ &\text{ zwischen } x \text{ und } x + \delta x \text{ zu liegen;} \end{aligned} \tag{C.1.26}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = &\text{ Wahrscheinlichkeit eines Messwertes,} \\ &\text{ zwischen } x = a \text{ und } x = b \text{ zu liegen.} \end{aligned} \tag{C.1.27}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \text{ ist die Normierungsbedingung.} \tag{C.1.28}$$

C.1.4 Die Gauss- oder Normalverteilung

Die Normalverteilung ist gegeben durch

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} \quad , \tag{C.1.29}$$

wobei

$$\begin{aligned} X &= \text{Zentrum der Verteilung} \\ &= \text{wahrer Wert der Verteilung} \\ &= \text{Mittelwert nach } \infty \text{ vielen Messungen,} \\ \\ \sigma &= \text{„Breiteparameter“} \\ &= \text{(wahre) Breite der Verteilung} \\ &= \text{Standardabweichung nach } \infty \text{ vielen Messungen.} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert innerhalb von t Standardabweichungen von X liegt, d. h. dass gilt $(X - t\sigma) \leq x \leq (X + t\sigma)$, ist

$$P(\text{innerhalb } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z \tag{C.1.30}$$

$$\begin{aligned} &= \text{normales Fehlerintegral, auch „Fehlerfunktion“} \\ &=: \mathrm{erf}(t) \quad (\text{von } \langle\text{engl.}\rangle \textit{ error function}). \end{aligned} \tag{C.1.31}$$

Insbesondere ist

$$P(\text{innerhalb } 1\sigma) \approx 68\,\% \quad . \tag{C.1.32}$$

An den Stellen $X \pm \sigma$ liegen die Wendepunkte der glockenförmigen GAUSSkurve (siehe Abbildung C.1.1). Der Funktionswert beträgt an diesen Stellen $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$, ist also um den Faktor $1/\sqrt{e}$ kleiner als am Maximum bei X.
Andere gebräuchliche Maße für die Breite sind die sog. Halbwertsbreite, die die Breite der Kurve zwischen den Stellen halben Maximalwertes bezeichnet und die meist als FWHM (⟨engl.⟩ *Full Width at Half Maximum*) abgekürzt wird. Manchmal findet man auch HWHM = FWHM/2 (⟨engl.⟩ *Half Width at Half Maximum*). Es gilt:

$$\text{FWHM} = 2\sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2} \approx 2.35 \cdot \sigma \tag{C.1.33}$$

$$\text{HWHM} = \sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2} \approx 1.18 \cdot \sigma \approx \sigma \quad \text{(grobe Näherung!)} \tag{C.1.34}$$

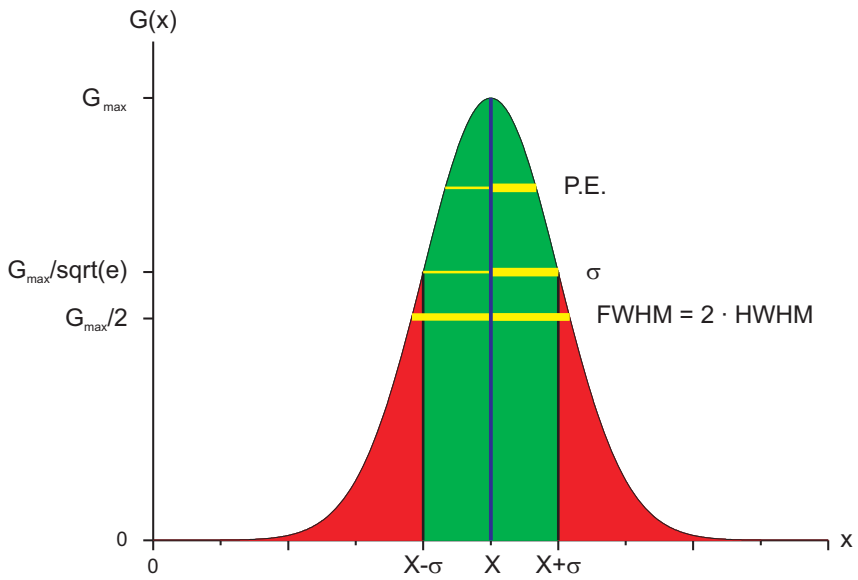

Abbildung C.1.1: Die GAUSS-Verteilung.

Die besondere Bedeutung der GAUSS-Funktion für die Praxis ergibt sich im Wesentlichen aus folgenden Gründen:

- Unter der Voraussetzung, dass *viele kleine unabhängige zufällige* Fehler das Messergebnis beeinflussen, ergibt sich eine GAUSS-Verteilung der Messwerte.
- Die Binomialverteilung $b_{n,p}(\nu)$ (siehe Abschnitt C.1.7) kann für festes p und große n sehr gut durch eine GAUSS-Verteilung $G_{X,\sigma}(x)$ mit demselben Mittelwert $X = np$ und derselben Breite $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ angenähert werden.

C.1.5 Gewichtete Mittelwerte

Sind $x_1, \ldots, x_N$ Messwerte derselben Größe x mit bekannten Unsicherheiten $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, so ist der Bestwert von x

$$x_{\text{best}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_i} \quad , \tag{C.1.35}$$

mit den „Gewichten“

$$w_i = (\sigma_i)^{-2} \quad . \tag{C.1.36}$$

Die Unsicherheit von x_{best} ist dabei gegeben durch

$$\sigma_{x_{\text{best}}} = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \right)^{-1/2} \quad . \tag{C.1.37}$$

C.1.6 Anpassung einer Geraden nach der Methode der kleinsten (Fehler-)Quadrate

Es seien $(x_1,y_1), \ldots, (x_N,y_N)$ gemessene Wertepaare, an die eine Gerade der Form

$$y = A + B \cdot x \tag{C.1.38}$$

angepasst werden soll. Unter den Voraussetzungen, dass einerseits die Unsicherheit in den x_i vernachlässigbar ist und die y_i alle die gleiche Unsicherheit δy aufweisen (eine bei vielen Experimenten vernünftige Annahme), genauer gesagt also, wenn alle Messwerte x_i exakt sind und jeder Messwert y_i einer Gauss-Verteilung mit dem Breiteparameter σ_y folgt, sind die besten Schätzwerte A_{best} und B_{best} für die Konstanten A und B gegeben durch

$$A_{\text{best}} = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{\Delta} \quad , \tag{C.1.39}$$

$$B_{\text{best}} = \frac{N\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\Delta} \tag{C.1.40}$$

mit

$$\Delta = N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2 \quad . \tag{C.1.41}$$

Weiterhin ergeben sich die Unsicherheiten der Messwerte y_i (mittlerer Fehler der Einzelmessung) sowie der Schätzwerte A_{best} und B_{best} als

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{(N-2)} \sum_{i=1}^{N} [y_i - (A_{\text{best}} + B_{\text{best}} \cdot x_i)]^2 \tag{C.1.42}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{\sigma_y^2 \sum x_i^2}{\Delta} \tag{C.1.43}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{N\sigma_y^2}{\Delta} \quad . \tag{C.1.44}$$

Man beachte den Nenner $(N-2)$ beim Fehler der Einzelmessung. Er ist gleich der Zahl der sogenannten „Freiheitsgrade“, d. h. der Zahl der Messwerte minus der Zahl der aus ihnen berechneten Parameter und unterscheidet sich daher vom Nenner $(N-1)$ in Gleichung (C.1.16) bei der nur ein Parameter, nämlich der Mittelwert $\overline{x}$, aus den Daten berechnet wird.
Für den (eher unrealistischen) Fall, dass A und B exakt bekannt sind, erhält man mit der folgenden Formel einen noch besseren Schätzwert für die Unsicherheiten der Messwerte:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [y_i - (A + B \cdot x_i)]^2 \tag{C.1.45}$$

Lässt man die Voraussetzung fallen, dass die Unsicherheiten der y_i alle gleich groß sind und nimmt stattdessen an, dass sie jeweils durch σ_i gegeben sind, wobei die Unsicherheiten in den x_i weiterhin vernachlässigbar sein sollen, so erhält man die allgemeineren Ausdrücke

$$A_{\text{best}} = \frac{(\sum w_i\, x_i^2)\,(\sum w_i\, y_i) - (\sum w_i\, x_i)\,(\sum w_i\, x_i y_i)}{\Delta} \quad , \tag{C.1.46}$$

$$B_{\text{best}} = \frac{(\sum w_i)\,(\sum w_i\, x_i y_i) - (\sum w_i\, x_i)\,(\sum w_i\, y_i)}{\Delta} \tag{C.1.47}$$

$$\sigma_A^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{(\sum w_i\, x_i^2)\, w_j - (\sum w_i\, x_i)\, w_j x_j}{\Delta} \cdot \sigma_j \right]^2 \tag{C.1.48}$$

$$\sigma_B^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{(\sum w_i)\, w_j x_j - (\sum w_i\, x_i)\, w_j}{\Delta} \cdot \sigma_j \right]^2 \tag{C.1.49}$$

mit

$$\Delta = \left(\sum w_i\right) \left(\sum w_i\, x_i^2\right) - \left(\sum w_i\, x_i\right)^2 \tag{C.1.50}$$

$$w_i = 1/\sigma_i^2 \quad . \tag{C.1.51}$$

Die Werte w_i bezeichnet man als „Gewichte“ der Messwerte. Sie sind ein Maß dafür, wie sehr der jeweilige Messwert die Berechnung der Ausgleichsgeraden beeinflusst.
Ein typisches Beispiel für gewichtete Messwerte sind Zählwerte beim radioaktiven Zerfall.[3] Die absolute Unsicherheit eines Zählwertes ν beträgt $\delta\nu = \sqrt{\nu}$, hängt also direkt vom Zählwert ab. Das Gewicht eines solchen Zählwertes ist dann $w = 1/(\sqrt{\nu})^2 = 1/\nu$.

C.1.7 Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit eines „Erfolgs“ bei einem Versuch sei p (von ⟨engl.⟩ *probability*), dann ist die Wahrscheinlichkeit von ν Erfolgen bei n Versuchen

$$P(\nu \text{ Erfolge bei } n \text{ Versuchen}) = b_{n,p}(\nu) \tag{C.1.52}$$

$$= \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} \tag{C.1.53}$$

$$= \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu} \quad . \tag{C.1.54}$$

Dabei steht $n!$ für die sog. Fakultät der Zahl n, $\binom{n}{\nu}$ für den sog. Binomialkoeffizienten (Sprechweise: „n über ν“).[4]
Nach vielen Reihen von jeweils N Versuchen ist die mittlere Anzahl der Erfolge

$$\overline{\nu} = np \quad , \tag{C.1.55}$$

und die Standardabweichung ist

$$\sigma_\nu = \sqrt{np(1-p)} \quad . \tag{C.1.56}$$

Die Binomialverteilung selbst ist in der Experimentalphysik nicht von allzu großer praktischer Bedeutung. Sie ist andererseits quasi die „Mutter aller Verteilungen“. Aus ihr folgen die Poisson- und die überaus wichtige Gauss-Verteilung als Näherungen.[5]

C.1.8 Poisson-Verteilung

Beim Zählen von radioaktiven Zerfällen (und anderen zufälligen Ereignissen) ist die Wahrscheinlichkeit des Zählwerts ν während einer gegebenen Zeitdauer

$$P(\text{Zählwert } \nu) = p_\mu(\nu) = \mathrm{e}^{-\mu} \cdot \frac{\mu^\nu}{\nu!} \quad , \tag{C.1.57}$$

wobei μ der erwartete mittlere Zählwert in dem betreffenden Zeitintervall ist.

[3] Allerdings darf man nicht die Zählrate, sondern muss sinnvollerweise deren Logarithmus über der Zeit auftragen, um eine Ausgleichsgerade zu berechnen.

[4] Zu diesen Schreibweisen siehe auch Abschnitt E auf Seite 713, insbesondere die Gleichungen (E.1.7) bis (E.1.34). Dort sind auch Näherungsformeln für die Berechnung der Fakultät für große Zahlen angegeben.

[5] Für die Gauss-Verteilung findet sich der Beweis hierzu z. B. in [Tay88] auf den Seiten 175–176.

Nach ∞ vielen Experimenten gilt also

$$\overline{\nu} = \mu \quad . \tag{C.1.58}$$

Die Standardabweichung ist

$$\sigma_\nu = \sqrt{\mu} \quad . \tag{C.1.59}$$

Die POISSON-Verteilung ergibt sich als Näherung aus der Binomialverteilung für den Fall, dass p sehr klein (z. B. Zerfallswahrscheinlichkeit eines radioaktiven Atomkerns während eines Messintervalls, typische Größenordnung 10^{-20}) und gleichzeitig n sehr groß (z. B. Zahl der Atome in einer untersuchten Festkörperprobe, typische Größenordnung 10^{+20}) ist. Das Produkt np ergibt dabei gerade den Parameter μ der POISSON-Verteilung.

C.1.9 Kovarianz und Korrelation

Die Kovarianz σ_{xy} von N Paaren $(x_1,y_1),\ldots,(x_N,y_N)$ ist

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \quad . \tag{C.1.60}$$

Der lineare Korrelationskoeffizient ist

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \\ &= \tfrac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\overline{x})^2 \cdot \sum(y_i-\overline{y})^2}} \\ &= \tfrac{N(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[N\sum(x^2)-(\sum x)^2\right]\cdot\left[N\sum(y^2)-(\sum y)^2\right]}} \quad . \end{aligned} \tag{C.1.61}$$

r ist ein quantitatives Maß dafür, wie gut die Messwertepaare (x_i,y_i) zu einer Geraden der Form $y = A + B \cdot x$ passen.
r-Werte in der Nähe von 1 oder -1 weisen auf eine starke lineare Korrelation hin.
Eine beobachtete Korrelation r_b wird häufig als „signifikant“ betrachtet, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, bei unkorrelierten Variablen einen Wert r mit $|r| \geq |r_\mathrm{b}|$ zu erhalten, kleiner als 5 Prozent ist. Mit „hochsignifikant“ bezeichnet man manchmal den Fall, dass die entsprechende Wahrscheinlichkeit unter 1 Prozent liegt.
Erwartet man einen komplizierteren Zusammenhang zwischen den x_i und den y_i als eine Gerade, so geht man zum χ^2-Test über.

C.1.10 Chiquadrat (χ^2)

Die Ergebnisse aller wiederholten Messungen können in Klassen $k = 1,\ldots,n$ eingeteilt werden. Dabei bezeichnet B_k die in Klasse k beobachtete Anzahl. Entsprechend bezeichnet

E_k die aufgrund irgendeiner angenommenen Verteilung (z.B. Gauss-, Binomial- oder Poisson-Verteilung) in Klasse k erwartete Anzahl. Wir definieren Chiquadrat durch

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(B_k - E_k)^2}{E_k} \quad , \tag{C.1.62}$$

Alternativ können wir auch schreiben

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\text{beobachteter Wert} - \text{erwarteter Wert}}{\text{Standardabweichung}} \right)^2 \quad . \tag{C.1.63}$$

Das Problem dabei ist, dass alle erwarteten Werte und alle Standardabweichungen bekannt sein müssen.
Nehmen wir an, dass die Unsicherheit der x_i vernachlässigbar ist und die Unsicherheiten der y_i durch σ_i gegeben sind. Dann gilt für einen beliebigen erwarteten Zusammenhang der Form $y = f(x)$:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \quad . \tag{C.1.64}$$

Aussagekräftiger als χ^2 selbst ist das sog. reduzierte Chiquadrat, das durch

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{d} \tag{C.1.65}$$

definiert ist, wobei d die Anzahl der Freiheitsgrade ist.
Ist $\tilde{\chi}^2 \gg 1$, so ist die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Erwartung schlecht, und wir verwerfen die angenommene Verteilung. Wenn $\tilde{\chi}^2 \lessapprox 1$ ist, dann ist die Übereinstimmung zufriedenstellend, und beobachtete und erwartete Verteilung sind miteinander verträglich.
Ähnlich wie bei der linearen Korrelation (siehe Abschnitt C.1.9) muss man Grenzen festlegen, ab denen eine Übereinstimmung als „signifikant“ gewertet wird. Man wählt üblicherweise die gleichen Kriterien (5 % bzw. 1 %), bezieht sich bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten allerdings nicht auf den linearen Korrelationskoeffizienten r, sondern auf das reduzierte Chiquadrat $\tilde{\chi}^2$.

C.1.11 Anpassung beliebiger Funktionen an Messwerte

Die Anpassung eines Polynoms, einer linearen Funktion oder gar einer beliebigen Funktion an die Messwerte wird mittels des χ^2-Tests durchgeführt. Die anzupassenden Parameter werden dabei so gewählt, dass sich für χ^2 ein Minimum ergibt.

C.1.12 Hilfsformeln

Umformungen

Einige allgemein gültige Formeln sind bei der Umformung der im Rahmen der Fehlerrechnung auftretenden Ausdrücke recht hilfreich:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2 \tag{C.1.66}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]&=\sum_{i=1}^{N}(x_iy_i)-N\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}\\&=\sum_{i=1}^{N}(x_iy_i)-\tfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}y_i\right)\end{aligned} \tag{C.1.67}$$

Zufallszahlen

Viele Taschenrechner und Computer-Programme stellen eine Funktion zur Erzeugung einer Zufallszahl zur Verfügung. Diese ist üblicherweise gleichverteilt im Intervall [0,1[.
Um aus diesen gleichverteilten Zufallszahlen GAUSSverteilte Zufallszahlen zu berechnen, eignet sich z. B. das als „Box-Muller-Algorithmus“ bekannte Verfahren.
Gegeben seien zwei unabhängige gleichverteilte Zufallszahlen x_1 und x_2 im Intervall [0,1[. Dann erhält man daraus die unabhängigen GAUSSverteilten Zufallszahlen y_1 und y_2 mit dem Erwartungswert 0 und der Standardabweichung 1 auf folgende Weise:

$$\theta=2\pi\cdot x_1 \tag{C.1.68}$$

$$r=\sqrt{-2\cdot\ln x_2} \tag{C.1.69}$$

$$Y_1=r\cdot\cos\theta \tag{C.1.70}$$

$$y_2=r\cdot\sin\theta \tag{C.1.71}$$

C.1.13 weitere bekannte Verteilungen

Es gibt weitere Verteilungen, die in den Naturwissenschaften eine wichtige Rolle spielen, auch wenn sie für die hier vorgestellten Betrachtungen zur Fehlerrechung nicht so entscheidend sind. In diesem Abschnitt soll zumindest eine Auswahl davon erwähnt werden.

C.1.13.1 MAXWELL-Verteilung

Diese Verteilung beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen in einem Gas. Jede Geschwindigkeitskomponente v_x, v_y, v_z folgt einer GAUSS-Verteilung, so dass gilt:

$$f(v_i)\cdot\mathrm{d}v_i=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{mv_i^2}{2kT}}\cdot\mathrm{d}v_i\qquad\text{mit } i=x,y,z\quad . \tag{C.1.72}$$

Für die Verteilung des Betrags der Geschwindigkeit $v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ ergibt sich daraus

$$g(v)\cdot\mathrm{d}v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}v^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}\cdot\mathrm{d}v\quad . \tag{C.1.73}$$

Betrachtet man die kinetische Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$, so erhält man

$$g(E) \cdot \mathrm{d}E = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}} \cdot \mathrm{d}E \quad . \tag{C.1.74}$$

C.1.13.2 Lorentz-Verteilung

Dieser Verteilung begegnet man häufig als Verteilungsfunktion von Energien in der Atom- und Kernphysik, aber auch als *der* Verteilungsfunktion schlechthin in der Optik. Sie hat die Form

$$L(x,X,\gamma) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\gamma/2)}{(x-X)^2 + (\gamma/2)^2} \tag{C.1.75}$$

mit

$$\begin{aligned} X &= \text{Zentralwert der Verteilung,} \\ \gamma &= \text{Halbwertsbreite der Verteilung,} \\ &= \text{FWHM} \quad (\langle\text{engl.}\rangle\ \textit{Full Width at Half Maximum}) \\ &= 2 \cdot \text{HWHM} \quad (\langle\text{engl.}\rangle\ \textit{Half Width at Half Maximum}) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(x,X,\gamma)\,\mathrm{d}x = 1 \quad , \tag{C.1.76}$$

$$\text{Maximalwert} = \frac{2}{\pi\gamma} \qquad \text{an der Stelle } x = X \quad , \tag{C.1.77}$$

$$L\left(X \pm \frac{\gamma}{2}, X, \gamma\right) = \frac{1}{2} \cdot L\left(X,X,\gamma\right) = \frac{1}{\pi\gamma} \quad . \tag{C.1.78}$$

Literaturverzeichnis

[fNB95] Normung e. V., DIN Deutsches Institut für (Herausgeber): *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen – Deutsche Übersetzung des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“*. Beuth Verlag GmbH, Berlin · Wien · Zürich, 1. Auflage, 1995.

[Tay82] Taylor, John R.: *An Introduction to Error Analysis - The Study of Uncertainties in Physical Measurements.* University Science Books, 55D Gate Five Road, Sausalito, CA 94965, USA, 1. edition, 1982.

[Tay88] Taylor, John R.: *Fehleranalyse - Eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen.* VCH Verlagsgesellschaft mbH, 6940 Weinheim, Bundesrepublik Deutschland, 1. Auflage, 1988.

[Tay97] Taylor, John R.: *An Introduction to Error Analysis - The Study of Uncertainties in Physical Measurements.* University Science Books, 55D Gate Five Road, Sausalito, CA 94965, USA, 2. Auflage, 1997.

C.2 Ein ausführlicheres Beispiel

Am Beispiel eines Fadenpendels sollen einige der in Abschnitt C.1 angegebenen Formeln angewandt werden.
Ziel des Experiments soll die Bestimmung der Erdbeschleunigung g sein.
Dazu werden die Länge l und die Schwingungsdauer T jeweils mehrfach gemessen. Aus den erhaltenen Werten wird jeweils der Mittelwert ($\bar{l}$ bzw. $\overline{T}$) und dessen Unsicherheit (Standardabweichung $\sigma_{\bar{l}}$ bzw. $\sigma_{\overline{T}}$) bestimmt. Schließlich wird mit Hilfe der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels die Erdbeschleunigung g berechnet. Die Unsicherheit σ_g von g erhält man mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes.
Die Länge werde in unserem Beispiel 5-mal gemessen. Man erhält die Werte $l_1, \ldots, l_5$:

Nr. i	Messwerte l_i in m	Mittelwert $\bar{l}$ in m	$\left(l_i - \bar{l}\right)^2$ in m^2	Std.-Abw. σ_l in m	... des Mittelw. $\sigma_{\bar{l}}$ in m	relative ... $\frac{\sigma_{\bar{l}}}{\bar{l}}$	Ergebnis l
1	0.934		$2.916 \cdot 10^{-5}$				
2	0.924		$2.116 \cdot 10^{-5}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$1.78 \cdot 10^{-3}$		0.9286(18) m
3	0.926	0.9286	$6.760 \cdot 10^{-6}$			$1.91 \cdot 10^{-3}$	
4	0.928		$3.600 \cdot 10^{-7}$			$\approx 0.2\,\%$	$0.9286\,\mathrm{m} \pm 0.2\,\%$
5	0.931		$5.760 \cdot 10^{-6}$				
Summe:	4.643		$6.320 \cdot 10^{-5}$				

Die Schwingungsdauer werde 8-mal gemessen mit den Messwerten $T_1, \ldots, T_8$:

Nr. i	Messwerte T_i in s	Mittelwert $\overline{T}$ in s	$\left(T_i - \overline{T}\right)^2$ in s^2	Std.-Abw. σ_T in s	... des Mittelw. $\sigma_{\overline{T}}$ in s	relative ... $\frac{\sigma_{\overline{T}}}{\overline{T}}$	Ergebnis T
1	1.931		$2.250 \cdot 10^{-6}$				
2	1.938		$3.025 \cdot 10^{-5}$				
3	1.940		$5.625 \cdot 10^{-5}$				
4	1.924		$7.225 \cdot 10^{-5}$	$5.21 \cdot 10^{-3}$	$1.84 \cdot 10^{-3}$		1.9325(18) s
5	1.931	1.9325	$2.250 \cdot 10^{-6}$			$9.53 \cdot 10^{-4}$	
6	1.928		$2.025 \cdot 10^{-5}$			$\approx 0.1\,\%$	$1.9325\,\mathrm{s} \pm 0.1\,\%$
7	1.935		$6.250 \cdot 10^{-6}$				
8	1.933		$2.500 \cdot 10^{-7}$				
Summe:	15.460		$1.900 \cdot 10^{-4}$				

Als besten Wert für die Erdbeschleunigung g errechnen wir also

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot \bar{l}}{\overline{T}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0.9286\,\mathrm{m}}{(1.9325\,\mathrm{s})^2} = 9.8163\,\mathrm{m/s^2}$$

und für die *relative* Unsicherheit nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz unter Voraussetzung einer Normalverteilung der Messwerte

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{l}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_{\overline{T}}}{\overline{T}}\right)^2} = \sqrt{(0.2\,\%)^2 + (2 \cdot 0.1\,\%)^2} = 0.3\,\% \quad .$$

Die *absolute* Unsicherheit des Wertes für g beträgt demnach gerundet

$$\begin{aligned}\sigma_g &= \frac{\sigma_g}{g} \cdot g \\ &= 0.3\,\% \cdot 9.8163\,\mathrm{m/s^2} \\ &\approx 0.03\,\mathrm{m/s^2} \quad .\end{aligned}$$

Wir runden g auf die gleiche Stelle wie σ_g und können das Endergebnis angeben:
Der ermittelte Wert für die Erdbeschleunigung g beträgt

$$\begin{aligned}g &= 9.82(3)\,\mathrm{m/s^2} \\ &= 9.82\,\mathrm{m/s^2} \pm 0.03\,\mathrm{m/s^2} \\ &= 9.82\,\mathrm{m/s^2} \pm 0.3\,\% \quad .\end{aligned}$$

C.3 Eine kleine Einführung

[redacted] Auch an diesem Abschnitt des AP-Skriptes wird weiterhin gearbeitet... [redacted] Diese Einführung in die Fehlerrechnung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie legt auch keinen allzu großen Wert auf mathematische Exaktheit, solange die Verwendbarkeit der Aussagen für naturwissenschaftliche Experimente dadurch nicht beeinträchtigt wird. Sie soll den Teilnehmerinnen und Teilnehmern am Physikalischen Anfängerpraktikum den Einstieg in diesen wichtigen Teil der experimentellen Naturwissenschaften erleichtern.

C.3.1 Physikalische Größen

Eine physikalische Größe ist eine quantitative Aussage über ein Merkmal eines physikalischen Objektes. Die Größe wird durch eine Messung ermittelt, die darin besteht, dass die zu messende Größe mit einer willkürlich festgelegten Einheit verglichen wird. Man erhält dabei einen Zahlenwert, der angibt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Zu jeder physikalischen Größe gehört daher ein Zahlenwert und eine Einheit (siehe hierzu auch Abschnitt D auf Seite 711). Man kann schreiben

$$\begin{array}{rcccc} \text{physikalische Größe} & = & \text{Zahlenwert} & \cdot & \text{Einheit} \\ a & = & \{a\} & \cdot & [a] \end{array}$$

$$\text{Beispiel:}\quad \begin{array}{rcccc} \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum} & = & 299792458 & \cdot & \text{Meter/Sekunde} \end{array}$$

C.3.2 Der Begriff des „Fehlers“

Anders als in der Umgangssprache wird mit dem Begriff „Fehler“ in den Naturwissenschaften nicht die „Falschheit“ von Messergebnissen oder das „Fehlverhalten“ des Messenden bezeichnet, sondern die unvermeidliche Unsicherheit, die jeder Messung anhaftet, egal wie sorgfältig sie durchgeführt wird. Bestenfalls kann man hoffen zu erreichen, dass die Unsicherheiten so klein wie möglich sind, und dass man einen brauchbaren Schätzwert für ihre Größe hat. In den meisten Lehrbüchern werden zusätzliche Definitionen des Begriffs „Fehler“ eingeführt. Hier werden wir „Fehler“ jedoch ausschließlich im Sinne von „Unsicherheit“ verwenden.[6]

C.3.3 Arten von Fehlern

Man kann verschiedene Arten von Fehlern unterscheiden, von denen nur ein Teil einer statistischen Behandlung zugänglich ist.

1. Definitionsprobleme:

[6] Nach DIN werden übrigens alle während einer Messung auftretenden Fehler als „Abweichungen“ bezeichnet. „Unsicherheiten“ sind die Fehler in der Angabe der Messergebnisse.

Sehr häufig ist es nicht trivial, die eigentliche Fragestellung genau genug zu fassen. Die Dicke eines Haares variiert z. B. mit der Temperatur, der relativen Luftfeuchtigkeit (oder überhaupt der umgebenden Atmosphäre), eventuellen Schmutzschichten, usw. Man kann aber nicht erwarten, ein eindeutiges und reproduzierbares Ergebnis zu erhalten, wenn nicht alle relevanten Parameter erfasst sind. Jeder Experimentator kann sozusagen die Frage etwas anders verstehen, und man bekommt u. U. entsprechend abweichende Ergebnisse.

2. Systematische Fehler:

   Wird eine Messung mit einem Messgerät durchgeführt, dessen Anzeige immer in der gleichen Art von der gesetzlichen Norm abweicht, also z. B. mit einer Stoppuhr, die zu schnell läuft, so erhält man stets („systematisch“) gleichartige Abweichungen des Messwertes vom wahren Wert.

3. Zufällige Fehler:

   Viele Einflüsse von Messgeräten, Messobjekten, der Umwelt oder auch des Beobachters sind rein zufälliger Art und werden messtechnisch nicht erfasst oder sind gar nicht erfassbar. Sie führen gleich häufig zu positiven wie negativen Abweichen der Messwerte vom wahren Wert, wobei große Abweichungen seltener auftreten als kleine Abweichungen. Als zufällige Fehler unterliegen sie statistischen Gesetzmäßigkeiten. Daher bietet sich eine Möglichkeit, über die Statistik einen Zugang zu diesen Fehlern zu bekommen.

C.3.4 Unvermeidbarkeit der Unsicherheit

Die Unsicherheit bei einer naturwissenschaftlichen Messung lässt sich prinzipiell zwar gering halten, aber nicht vollständig vermeiden.[7] Dies liegt u. a. daran, dass jede Messung in irgend einer Form die „Ablesung einer Skala“ erfordert. Stimmt der abzulesende Wert nicht exakt mit einer Markierung auf der Skala überein, so muss ein Zwischenwert geschätzt oder auf den Wert einer vorhandenen Markierung gerundet werden. In beiden Fällen resultiert eine gewisse Unsicherheit des abgelesenen Wertes. Auch wenn man die Unterteilung der Skala feiner und feiner macht, ist dieses Problem nie restlos zu beseitigen,

[7] Dies gilt natürlich nicht für *mathematische* Fragestellungen wie z. B. nach dem Verhältnis zwischen dem Umfang eines Kreises und seinem Durchmesser, das mit der Zahl π exakt angegeben werden kann. Im Grunde ist die Frage damit allerdings nicht beantwortet, sondern es ist nur ein neues allgemein anerkanntes Symbol eingeführt worden.
Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum kann man ebenfalls einen exakten Wert angeben. Sie beträgt $c_0 = 299792458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Dies ist aber lediglich eine Folge davon, dass man übereingekommen ist, diese physikalisch überaus wichtige Größe als Bezugsgröße zu *definieren*, so dass in Folge die unvermeidliche Unsicherheit auf die Längeneinheit Meter übergeht, für die im internationalen Einheitensystem SI folgende Messvorschrift festgelegt wurde:
1 Meter ist gleich der Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299792458}$ Sekunden durchläuft.

denn es wird immer Werte zwischen den Markierungen geben.[8]

C.3.5 Bedeutung der Unsicherheit

Die zu einer Messung gehörende Unsicherheit hat wesentliche Bedeutung und muss stets mit angegeben werden, um die Vergleichbarkeit mit anderen Messungen zu gewährleisten, die ja auch mit einer Unsicherheit behaftet sind. Ohne Kenntnis über die Unsicherheit ist es nicht möglich, festzustellen, ob zwei Messwerte miteinander konsistent sind oder sich widersprechen.
Hinter dieser recht allgemeinen Formulierung verbirgt sich z. B. folgendes Problem aus der Praxis:
Möchte man in einem Verkaufsautomaten die Echtheit der eingeworfenen Münzen prüfen, so kann man ihre physikalischen Eigenschaften bestimmen: Durchmesser, Dicke, Masse, elektrische Leitfähigkeit, Permeabilitätskonstante, usw.. Die Messwerte werden dann mit tabellierten Werten für „echte“ Münzen verglichen. Dabei wird man nicht erwarten können, eine vollständige Übereinstimmung zu finden, da zu viele Fehlerquellen im Spiel sind: Abnutzungsgrad, Verschmutzung, Temperatur, Herstellungstoleranzen der Münzen, systematische und zufällige Abweichungen der Messinstrumente, usw.. Trotzdem möchte man letztlich zu einer Aussage kommen, ob die Messwerte mit einer akzeptablen Wahrscheinlichkeit für oder gegen die Echtheit der Münze sprechen. Dies bedeutet nichts anderes, als die Konsistenz der Messwerte mit den tabellierten Werten zu überprüfen. Am Ende kann dann z. B. eine Aussage folgender Art getroffen werden: „Die Münze ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % echt.“ Essentiell bei diesem Prozess ist die Kenntnis der Intervalle, innerhalb derer die Messerte zufällig variieren können. Sind diese nicht bekannt, kann keine Aussage getroffen werden. Daher gilt:
Die Angabe eines Messwertes ohne die zugehörige Unsicherheit ist praktisch nutzlos!
Dies gilt natürlich in gleicher Weise für die Würdigung *aller* wissenschaftlichen Forschungsergebnisse.

C.3.6 Schreibweise von Unsicherheiten

Es gibt verschiedene Schreibweisen zur Angabe von Unsicherheiten bei Messwerten. In Tabelle C.3.1 ist eine Auswahl von in der Physik gebräuchlichen Varianten zusammengestellt. Die Unsicherheiten werden dabei entweder als „absolute Unsicherheiten“ δx mit der gleichen Einheit wie der zugehörige Wert x oder als „relative Unsicherheiten“, d. h. dimensionsloses Verhältnis $\frac{\delta x}{x}$ zwischen der Unsicherheit und dem Wert selbst, angegeben.

[8] Dies ist letztlich eine Folge davon, dass man durch immer weiteres Unterteilen nur abzählbar viele Markierungen machen kann, nämlich so viele, wie es rationale Zahlen (Brüche) gibt. Die zu messenden Werte können aber aus dem gesamten Bereich der reellen Zahlen mit überabzählbar vielen Werten stammen.

Nr.	Form	Beispiel	Kommentar
1	$\overline{x} \pm \delta x$	$2\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm}$	sehr häufig auch im Alltag
2		$2\,\mathrm{m} \pm 0.05\,\mathrm{m}$	
3		$(2 \pm 0.05)\,\mathrm{m}$	
4		$2 \pm 0.05\,\mathrm{m}$	nicht exakt, aber trotzdem häufig anzutreffen
5	$\overline{x} \cdot \left(1 \pm \frac{\delta x}{\overline{x}}\right)$	$2\,\mathrm{m} \cdot (1 \pm 0.025)$	mathematisch exakt, aber eher ungebräuchlich
6	$\overline{x} \pm \frac{\delta x}{\overline{x}}$	$2\,\mathrm{m} \pm 2.5\,\%$	mathematisch nicht ganz exakte, aber weithin akzeptierte Schreibweise
7	$\{\overline{x}\}(\{\delta x\})[\overline{x}]$	$2.00(5)\,\mathrm{m}$	sehr kompakt, häufig in wissenschaftlichen Veröffentlichungen

Tabelle C.3.1: Verschiedene übliche Schreibweisen zur Angabe von Messunsicherheiten (der Autor bevorzugt die Schreibweise 7).

Bei der Schreibweise Nr. 7 kommt es leider häufig zu Missverständnissen. Die eingeklammerten Ziffern sind keine weiteren Dezimalstellen, deren Gültigkeit irgendwie eingeschränkt ist, sondern sie stellen die Messunsicherheit selbst als Absolutwert dar. Die Wertigkeit der letzten Ziffer vor der Klammer entspricht dabei der Wertigkeit der letzten Ziffer in der Klammer.

Ausführliche Erläuterungen zu den Schreibweisen finden sich u. a. in [fNB95].

C.3.6.1 Signifikante Stellen

C.3.6.2 Diskrepanz

C.3.7 „Kochrezept“ zur statistischen Ermittlung von Bestwert und Messunsicherheit

Angenommen Sie haben eine Größe x insgesamt N mal gemessen und dabei die Messwerte $x_1, \ldots, x_N$ erhalten. Unter der Annahme, dass alle dabei auftretenden Abweichungen zufälliger Natur sind, sollen Sie nun ein „Endergebnis“ berechnen. Sie können dazu folgendes „Kochrezept“ anwenden:

1. Bestimmung des besten Schätzwertes für den wahren Wert X durch Berechnung des arithmetischen Mittelwertes $\overline{x}$ nach

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad . \tag{C.3.1}$$

2. Bestimmung des besten Schätzwertes für die wahre Breite σ der Verteilung durch Berechnung der Standardabweichung σ_x nach

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \quad . \tag{C.3.2}$$

3. Berechnung des besten Schätzwertes $\sigma_{\overline{x}}$ für die Unsicherheit des Mittelwertes nach

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad . \tag{C.3.3}$$

4. Runden von $\sigma_{\overline{x}}$ auf *eine geltende Ziffer* (evtl. zwei geltende Ziffern, falls die erste Ziffer eine 1 oder 2 ist).[9]
5. Runden von $\overline{x}$ auf die gleiche *Dezimalstelle*[10] wie $\sigma_{\overline{x}}$.[11]
6. Angabe der *gerundeten* Werte $\overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}$ oder $\overline{x} \pm \frac{\sigma_{\overline{x}}}{|\overline{x}|}$ (Schreibweisen siehe Tabelle C.3.1).

C.3.8 Schätzen einer Messunsicherheit

In vielen Fällen sind nicht genügend Messwerte verfügbar, um eine statistische Analyse durchführen zu können. Das heißt aber natürlich nicht, dass die Unsicherheit vernachlässigt werden kann. Es bleibt dann nichts anderes übrig, als die Unsicherheit auf andere Art zu schätzen. Man könnte z. B. beim Ablesen einer Skala zu dem Schluss kommen, dass bei der Ablesung bestenfalls 1/10 eines Skalenteils bestimmt werden kann. Die Unsicherheit wäre dann eben 1/10 Skalenteil.

C.3.9 Fortpflanzung von Unsicherheiten

Oft sind physikalische Größen nicht direkt messbar, sondern nur auf dem Umweg über die Messung anderer Größen, mit denen ein formelmäßiger Zusammenhang bekannt ist.[12] Verknüpft man nun aber zwei oder mehrere Messergebnissen für gleiche oder verschiedene physikalische Größen (die jeweils wieder aus mehreren Einzelmessen berechnet sein können) zu einer neuen physikalischen Größe, so führt die Unsicherheit in den Ausgangsgrößen dazu, dass auch die neu berechnete Größe eine gewisse Unsicherheit aufweist. Es stellt sich die wichtige Frage, wie sich diese *neue Unsicherheit möglichst gut abschätzen* lässt. Dabei soll die Abschätzung weder eine zu große Präzision vortäuschen, noch zu pessimistisch sein. Für die mit Hilfe der Statistik gefundene Lösung hat sich der Begriff „Fehlerfortpflanzung“ eingebürgert. Es handelt sich dabei also eher um eine „Unsicherheitsweitergabe“ oder „Unsicherheitszusammenfassung“.

[9] Eine Angabe von mehr Stellen für die Unsicherheit ist i. A. schon deshalb nicht sinnvoll, weil die Standardabweichung ja nur einen Schätzwert für die wahre Breite der Verteilung darstellt und selbst nur mit einer gewissen Unsicherheit bekannt ist (siehe Gleichung (C.1.21)). Bei Präzisionsmessungen ist manchmal auch die Angabe von zwei bzw. drei Ziffern für die Unsicherheit gerechtfertigt, im Praktikum trifft das allerdings eher nicht zu.

[10] Das bedeutet normalerweise *nicht* „gleiche Zahl von Ziffern“! Wichtig ist, dass die „Wertigkeit“ der jeweils letzten Ziffer gleich ist.

[11] Während einer längeren Rechnung sollte typischerweise mindestens eine Ziffer mehr „mitgeführt“ werden, um das Ansammeln von Rundungsfehlern zu vermeiden. Erst das Endergebnis wird dann gerundet.

[12] Manchmal ist es auch nur praktischer, diesen Weg zu gehen, selbst wenn eine direkte Messung möglich wäre.

Für diese Fehlerfortpflanzung lassen sich einige Regeln angeben, die in Abschnitt C.1.2 auf Seite 676 kompakt zusammengestellt sind und die hier noch etwas kommentiert werden sollen. Zunächst betrachten wir eine grobe Abschätzung, die anschließend unter gewissen Voraussetzungen noch etwas verbessert werden kann.

C.3.9.1 „Direkte Addition“ von Unsicherheiten

1. **Summen und Differenzen**

   Werden zwei Größen x und y addiert, um eine neue Größe q zu bilden, so steuert jede Ausgangsgröße ihre Messunsicherheit zur Unsicherheit des Endergebnisses bei. Die Unsicherheit dieses Ergebnisses wird also gerade die Summe der Unsicherheiten der Einzelgrößen sein. Gleiches gilt für Differenzen, denn zufällige Messunsicherheiten werden zwar stets mit positivem Vorzeichen angegeben, es treten aber Abweichungen mit beiderlei Vorzeichen auf. Es gilt also[13]

$$(x \pm \delta x) + (y \pm \delta y) = \underbrace{(x+y)}_{q} \pm \underbrace{(\delta x + \delta y)}_{\delta q} \quad . \tag{C.3.4}$$

   Gleiches gilt auch für die Differenz zweier Größen.

2. **Produkte und Quotienten**

   Auch für Produkte aus zwei Größen können wir durch Näherung leicht eine Regel ableiten. Multiplizieren wir $(x \pm \delta x)$ und $(y \pm \delta y)$, so erhalten wir

$$(x \pm \delta x) \cdot (y \pm \delta y) = x \left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right) \cdot y \left(1 \pm \frac{\delta y}{y}\right) \tag{C.3.5}$$

$$= x \cdot y \cdot \left(1 \pm \frac{\delta x}{x} \pm \frac{\delta y}{y} \pm \frac{\delta x}{x} \cdot \frac{\delta y}{y}\right) \quad . \tag{C.3.6}$$

   Gehen wir davon aus, dass die relativen Fehler nicht besonders groß sind, so können wir den letzen Term in der Klammer von Gleichung (C.3.6) vernachlässigen. Die beiden mittleren Terme fassen wir zusammen und erhalten bei pessimistischer Schätzung (beide Fehler wirken in die gleiche Richtung)

$$(x \pm \delta x) \cdot (y \pm \delta y) = \underbrace{(x \cdot y)}_{q} \cdot \left(1 \pm \underbrace{\left(\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}\right)}_{\frac{\delta q}{q}}\right) \quad . \tag{C.3.7}$$

   Ganz analog lässt sich das gleiche Ergebnis für den Quotient zweier Größen herleiten.

3. **Addition einer Konstanten**

[13] Der Umgang mit dem Zeichen „±“ erfolgt hier nicht mit mathematischer Strenge. Es symbolisiert einfach eine Unsicherheit in beide Richtungen, d. h. hier gilt sozusagen *nicht* „minus mal minus gibt plus“.

Die Addition einer Konstanten A bedeutet nichts weiter als eine Verschiebung aller Werte um den gleichen Betrag. Die absolute Unsicherheit der Werte wird davon nicht geändert, denn es gilt:

$$(x \pm \delta x) + A = \underbrace{(x + A)}_{q} \pm \underbrace{\delta x}_{\delta q} \quad . \tag{C.3.8}$$

4. **Multiplikation mit einer Konstanten**

   Bei der Multiplikation einer Größe mit einem konstanten Faktor B vervielfacht sich auch die absolute Unsicherheit entsprechend um den gleichen Faktor. Die relative Unsicherheit bleibt hingegen unverändert. Es gilt also

$$B \cdot (x \pm \delta x) = \underbrace{(B \cdot x)}_{q} \pm \underbrace{(B \cdot \delta x)}_{\delta q} \tag{C.3.9}$$

   und damit für die absolute Unsicherheit

$$\delta q = B \cdot \delta x \tag{C.3.10}$$

   sowie für die relative Unsicherheit

$$\frac{\delta q}{q} = \frac{B \cdot \delta x}{B \cdot x} \tag{C.3.11}$$

$$= \frac{\delta x}{x} \quad . \tag{C.3.12}$$

5. **Potenzen**

   Im einfachen Fall eines ganzzahligen Exponenten n kann die Berechnung von x^n als wiederholte Multiplikation aufgefasst werden, so dass die Regel für ein Produkt mehrfach hintereinander angewandt werden muss. Für jeden Faktor kommt also noch einmal der relative Fehler hinzu. Um die Rechnung auch für andere Exponenten durchführen zu können, betrachten wir eine Potenzreihenentwicklung für $\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)^n$ und brechen diese nach dem ersten Glied ab. Wir erhalten dann

$$(x \pm \delta x)^n = \left(x \cdot \left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)\right)^n \tag{C.3.13}$$

$$= x^n \cdot \left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)^n \tag{C.3.14}$$

$$= x^n \cdot \left(1 + n \cdot \frac{\delta x}{x} + \ldots\right) \tag{C.3.15}$$

$$\approx \underbrace{x^n}_{q} \cdot \left(1 + \underbrace{n \cdot \frac{\delta x}{x}}_{\frac{\delta q}{q}}\right) \quad . \tag{C.3.16}$$

6. **Beliebige Funktion einer Variablen**

   ... [redacted]

7. **Schrittweise Fortpflanzung**

   ... [redacted]

8. **Beliebige Funktion mehrerer Variablen**

   ... [redacted]

C.3.9.2 Unabhängige Unsicherheiten

Die bisher gemachten Abschätzungen sind sicher richtig, aber u. U. zu pessimistisch. Können wir nämlich davon ausgehen, dass die verschiedenen Unsicherheiten der in der Rechnung miteinander zu verknüpfenden Größen voneinander unabhängig sind, ermöglicht uns das die Angabe einer kleineren Gesamtunsicherheit. Dies ist auf zwei Eigenschaften der GAUSS-Verteilung zurückzuführen: sie ist symmetrisch und sie fällt von ihrem zentralen Wert nach außen hin ab. Es ist also durchaus möglich, dass die Abweichung in einer Größe die Abweichung in einer anderen Größe manchmal *zufällig* kompensiert. Außerdem ist es eher unwahrscheinlich, dass in allen Größen gleichzeitig große Abweichungen auftreten.
Die genaue mathematische Betrachtung liefert das Ergebnis, dass wir die oben hergeleiteten Formeln etwas abgeändert weiterverwenden können. Wir müssen lediglich die „direkte Addition“ der Unsicherheiten durch die sog. „quadratische Addition“ der Unsicherheiten ersetzen. Dabei werden die Unsicherheiten erst einzeln quadriert, dann addiert und schließlich die Wurzel gezogen. Die entsprechenden Formeln finden Sie alle in Abschnitt C.1.2 auf Seite 676.

C.3.10 Verwerfen von Daten

Das Thema des Verwerfens von Daten ist ein besonders heikles, über das unter Fachleuten keine vollständige Einigkeit besteht, sondern das im Gegenteil kontrovers diskutiert wird. Eine häufig vertretene Meinung ist die, dass das Verwerfen von Daten *niemals* gerechtfertigt ist, sofern nicht *äußere Beweise* für die *Inkorrektheit* der Messwerte existieren. Es mag aber zuweilen sinnvoll sein, zumindest ein Kriterium dafür zu haben, welche Daten *möglicherweise* hierfür in Frage kämen. Das weitere Vorgehen muss dann von Fall zu Fall sehr gewissenhaft abgewogen werden.

C.3.10.1 Das CHAUVENETsche Kriterium

Unter gewissen Umständen *kann* es akzeptabel sein, folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Berechne aus den Messwerten den Mittelwert $\overline{x}$ als besten Schätzwert und die Standardabweichung σ_x als Unsicherheit einer Einzelmessung.[14]

[14] Hier muss wirklich die Unsicherheit einer Einzelmessung und nicht die Unsicherheit des Mittelwertes verwendet werden!

2. Bestimme für jeden fraglichen Wert x_i, wie wahrscheinlich es ist, dass bei der gegebenen Zahl von Messungen ein Messwert mit einer so großen Abweichung vom besten Schätzwert auftritt.
   a) Bestimme, um wie viele Standardabweichungen der Messwert vom Mittelwert abweicht.
   b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit P für eine solche Abweichung.
   c) Bei N Messungen beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine solche Abweichung dann insgesamt $N \cdot P$.
3. Verwerfe Messwerte, für die die Wahrscheinlichkeit des Auftretens kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, oder ziehe das Verwerfen dieser Messwerte zumindest in Erwägung.
4. Berechne aus dem „bereinigten“ Datensatz einen neuen Mittelwert $\overline{x}_{\text{neu}}$ und dessen neue Unsicherheit $\sigma_{\overline{x},\text{neu}}$.
5. STOP! Verfahren auf keinen Fall wiederholen!

Achtung: Auf keinen Fall darf die oben beschriebene Prozedur mehrfach hintereinander angewandt werden! Sonst besteht die große Gefahr, die Verteilung nach und nach immer schmaler zu machen und dabei auch Messwerte zu verwerfen, die noch nicht einmal zu Beginn „zweifelhaft“ waren. Dies wäre ganz sicher ein völlig inakzeptabler Umgang mit Messwerten!

C.3.11 Einige Beweise

Die in diesem Abschnitt angegebenen Beweise sind zur Anwendung der Fehlerrechnungsformeln nicht unbedingt notwendig. Sie können aber vielleicht das Verständnis für diese Formeln erleichtern ohne mathematisch besonders anspruchsvoll zu sein, so dass die Lektüre vom Autor durchaus empfohlen wird.

C.3.11.1 Die Gauss-Verteilung für viele kleine zufällige Abweichungen

Siehe [Tay88] auf den Seiten 175–176.
Setzt man nun voraus, dass den Messwerten eine Gauss-Verteilung nach Gleichung (C.1.29) zugrundeliegt, also $G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}}$, so lassen sich viele der bisher ohne besondere Begründung verwendeten Formeln relativ leicht beweisen. Dies soll im Folgenden geschehen.

C.3.11.2 Der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ als bester Schätzwert für den wahren Wert X

Wir betrachten N Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_N$ der immer gleichen Größe x. Die Grundidee dabei ist, dass es einen wahren Wert X gibt, der der Zentralwert der Gauss-Verteilung ist, auch wenn diesen niemand kennt. Man „rät“ nun einen Wert $\widetilde{x}$ für X und berechnet die sich daraus ergebende Wahrscheinlichkeit dafür, genau die gemessenen Werte x_i zu

erhalten. Diese Rechnung kann man nun für jeden beliebigen Wert von $\widetilde{x}$ wiederholen. Als besten Schätzwert für X wählt man dasjenige $\widetilde{x}$, für das die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Mit anderen Worten: bei jedem anderen Zentralwert der GAUSS-Verteilung wäre es weniger wahrscheinlich gewesen, ausgerechnet diese Messwerte zu erhalten.
Es handelt sich hier also um ein Optimierungsproblem.
Betrachten wir das Verfahren Schritt für Schritt. Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert im Intervall $[x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1]$ zu erhalten. Sie beträgt

$$p(x \text{ zwischen } x_1 \text{ und } x_1 + \mathrm{d}x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x_1-X)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathrm{d}x_1 \tag{C.3.17}$$

$$\propto \frac{1}{\sigma} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{C.3.18}$$

Den Ausdruck in (C.3.18) kann man etwas salopp auch bezeichnen als die Wahrscheinlichkeit, „den Wert x_1 zu erhalten“, obwohl es ja eigentlich um ein kleines Intervall geht:

$$p(x_1) \propto \frac{1}{\sigma} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x_1-X)^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{C.3.19}$$

Analog berechnet man die Wahrscheinlichkeit, mit der die Messwerte $x_2, x_3, \ldots, x_N$ auftreten nach

$$p(x_2) \propto \frac{1}{\sigma} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x_2-X)^2}{2\sigma^2}} \quad , \tag{C.3.20}$$

$$p(x_3) \propto \frac{1}{\sigma} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x_3-X)^2}{2\sigma^2}} \quad , \tag{C.3.21}$$

$$\vdots$$

$$p(x_N) \propto \frac{1}{\sigma} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x_N-X)^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{C.3.22}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die gesamte Messreihe ist dann das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Es gilt also:

$$p_{X,\sigma}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot \ldots \cdot p(x_N) \tag{C.3.23}$$

$$\propto \frac{1}{\sigma^N} \cdot \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i-X)^2}{2\sigma^2}} \quad , \tag{C.3.24}$$

wobei die Indices X und σ angeben, welche GAUSS-Verteilung den Messwerten zugrunde liegt.
Da wir den wahren Wert der Messgröße und damit den Zentralwert der GAUSS-Verteilung nicht kennen, ersetzen wir ihn durch einen zunächst beliebigen Wert $\widetilde{x}$ und berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir für *diesen* Zentralwert unsere Messreihe erhalten hätten:

$$p_{\widetilde{x},\sigma}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} \cdot \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i-\widetilde{x})^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{C.3.25}$$

Die Wahrscheinlichkeit hängt auf relativ einfache Weise von unserem „geratenen“ Zentralwert $\widetilde{x}$ ab. Wir suchen denjenigen Wert von $\widetilde{x}$, für den die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Wie man leicht sieht, ist dies gerade dann erfüllt, wenn die Summe

$$\sum \frac{(x_i - \widetilde{x})^2}{2\sigma^2} \tag{C.3.26}$$

im Exponenten minimal wird.
Wir leiten die Summe also nach $\widetilde{x}$ ab und suchen eine Nullstelle dieser Ableitung:[15]

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \widetilde{x}_{\text{best}}) = 0 \tag{C.3.29}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} \widetilde{x}_{\text{best}}\right) = 0 \tag{C.3.30}$$

$$\Longrightarrow \quad N \cdot \widetilde{x}_{\text{best}} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{C.3.31}$$

$$\Longrightarrow \quad \widetilde{x}_{\text{best}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad . \tag{C.3.32}$$

Die Aussage von Gleichung (C.3.32) kennen wir aber schon aus Gleichung (C.1.15) als Definition des arithmetischen Mittelwertes $\overline{x}$. Somit ist bewiesen, dass $\overline{x}$ der beste Schätzwert für X ist.[16]

C.3.11.3 Die Standardabweichung σ_x als bester Schätzwert für die wahre Unsicherheit σ der Einzelmessung

Ganz ähnlich lässt sich zeigen, dass die Standardabweichung σ_x der beste Schätzwert für die wahre Breite σ der Verteilung ist. Die Ausdrücke sind ein bisschen länglicher, da die betrachtete Wahrscheinlichkeit in komplizierterer Weise von der Breite der Verteilung als von ihrem Zentralwert abhängt. Daher soll der Rechenweg hier ausführlich dargestellt werden. Wir führen zunächst in Gleichung (C.3.23) eine variable Breite $\widetilde{\sigma}$ ein und leiten

[15] Man kann natürlich auch den gesamten Ausdruck ableiten und erhält

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\widetilde{x}} = \frac{1}{\sigma^N} \cdot \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i-\widetilde{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\sum \frac{2(x_i - \widetilde{x})}{2\sigma^2} \cdot (-1)\right) \tag{C.3.27}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i-\widetilde{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot \sum (x_i - \widetilde{x}) \tag{C.3.28}$$

Die Exponentialfunktion kann nicht Null werden, daher muss für ein Maximum die Summe gleich Null werden. Die weitere Rechnung verläuft dann wie im Text beschrieben.

[16] Dass es sich bei dem Extremwert wirklich um ein Minimum des Exponenten und nicht etwa um ein Maximum handelt, ist leicht zu sehen, da sich für wesentlich größere bzw. kleinere Werte von $\widetilde{x}$ durch das Quadrat hinter dem Klammerausdruck in jedem Fall größere Werte für die Summe ergeben würden.

den Ausdruck einmal nach dieser Größe ab:

$$p_{X,\widetilde{\sigma}}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \propto \frac{1}{\widetilde{\sigma}^N} \cdot \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i - X)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}} \tag{C.3.33}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p_{X,\widetilde{\sigma}}}{\mathrm{d}\widetilde{\sigma}} \propto -\frac{N}{\widetilde{\sigma}^{N+1}} \cdot \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i - X)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}} + \frac{1}{\widetilde{\sigma}^N} \cdot \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i - X)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}} \cdot \left(\sum \frac{(x_i - X)^2}{2\widetilde{\sigma}^2} \right) \cdot \frac{2}{\widetilde{\sigma}^3} \tag{C.3.34}$$

$$= \frac{1}{\widetilde{\sigma}^{N+1}} \cdot \mathrm{e}^{-\sum \frac{(x_i - X)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}} \left[-N + \frac{1}{\widetilde{\sigma}^2} \sum (x_i - X)^2 \right] \quad . \tag{C.3.35}$$

Für ein Maximum muss dieser Ausdruck verschwinden.[17] Die Terme vor der eckigen Klammer sind beide stets größer Null, es kann also nur der Term in der eckigen Klammer gleich Null werden. Somit muss gelten:

$$-N + \frac{1}{\widetilde{\sigma}^2_{\text{best}}} \sum (x_i - X)^2 = 0 \tag{C.3.36}$$

$$\Longrightarrow \quad \widetilde{\sigma}_{\text{best}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - X)^2} \quad . \tag{C.3.37}$$

Die Aussage von Gleichung (C.3.37) kennen wir ebenfalls schon, diesmal aus Gleichung (C.1.18) als Definition der Standardabweichung unter Verwendung des wahren Wertes X. Da X aber nicht bekannt ist, muss dieser in der Rechnung schließlich noch durch den arithmetischen Mittelwert $\overline{x}$ ersetzt werden. Dabei bleibt der Wert für $\widetilde{\sigma}$ nur dann gleich, wenn zufällig $\overline{x} = X$ gilt. In allen anderen Fällen wird er kleiner, denn wir hatten ja etwas weiter oben bei den Betrachtungen zum arithmetischen Mittelwert gezeigt, dass der Ausdruck in (C.3.26) gerade für $\widetilde{x} = \overline{x}$ minimal wird. Eine genauere Betrachtung führt zu dem Ergebnis, dass man die beste Abschätzung für σ erhält, wenn man mit dem Einsetzen von $\overline{x}$ für X gleichzeitig einen Faktor $\sqrt{\frac{N}{N-1}}$ einführt.[18] Wir erhalten so schließlich

$$\widetilde{\sigma}_{\text{best}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \overline{x})^2} \tag{C.3.38}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \overline{x})^2} \tag{C.3.39}$$

als besten Schätzwert für die wahre Breite σ. Dieser Ausdruck ist identisch mit der Definition der Standardabweichung σ_x aus Gleichung (C.1.16).
Wir haben also insgesamt gezeigt, dass die Standardabweichung σ_x tatsächlich den besten Schätzwert für die wahre Breite σ der Verteilung darstellt.

[17] Ähnlich wie bei den Betrachtungen beim besten Schätzwert für X gilt auch hier, dass es sich auf jeden Fall um ein Maximum handeln muss. Für sehr kleine und sehr große $\widetilde{\sigma}$ geht nämlich der gesamte Ausdruck jeweils gegen Null — im einen Fall aufgrund der Exponentialfunktion mit dem negativen Exponenten, im anderen Fall wegen des Bruches vor der Exponentialfunktion.

[18] Der Beweis hierfür finden Sie ausführlich z. B. in [Tay97].

C.3.11.4 Quadratische Addition von Unsicherheiten

Wenn wir eine Anzahl von Messgrößen $x, \ldots, z$ mit den zugehörigen Unsicherheiten $\sigma_x, \ldots, \sigma_z$ kennen und daraus eine Größe $q(x, \ldots, z)$ berechnen, stellt sich unmittelbar die Frage nach deren Unsicherheit σ_q. Sofern wir eine GAUSS-Verteilung aller Messgrößen voraussetzen, lässt sich die Frage relativ einfach beantworten. Wir betrachten hierzu drei spezielle Fälle und darauf aufbauend den allgemeinen Fall:

C.3.11.4.1 Addition einer Konstante

Aus einer gemessenen Größe x, die einer GAUSS-Verteilung mit wahrem Wert X und Standardabweichung σ_x gehorcht, soll eine neue Größe q dadurch berechnet werden, dass eine Konstante A dazuaddiert wird:

$$q := x + A \quad . \tag{C.3.40}$$

Die Konstante A besitzt dabei selbst keine Unsicherheit.[19] Wir kennen bereits die Wahrscheinlichkeit, eines bestimmten Wert x_1 für x zu erhalten. Nach Gleichung (C.3.19) gilt hierfür

$$p_{X,\sigma_x}(x_1) \propto \mathrm{e}^{\frac{-(x_1-X)^2}{2\sigma_x^2}} \quad . \tag{C.3.41}$$

Uns interessiert nun die Wahrscheinlichkeit dafür, einen bestimmten Wert q_1 von q zu erhalten. Wegen $q_1 = x_1 + A$ gilt:

$$\begin{aligned} &(\text{Wahrscheinlichkeit, den Wert } q_1 \text{ für } q \text{ zu erhalten}) \\ = &(\text{Wahrscheinlichkeit, den Wert } x_1 = q_1 - A \text{ für } x \text{ zu erhalten}) \quad , \end{aligned}$$

und somit auch

$$p(q_1) \propto \mathrm{e}^{\frac{-[x_1-X]^2}{2\sigma_x^2}} \tag{C.3.42}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{-[(q_1-A)-X]^2}{2\sigma_x^2}} \tag{C.3.43}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{-[q_1-(X+A)]^2}{2\sigma_x^2}} \quad . \tag{C.3.44}$$

Aus Gleichung (C.3.48) liest man unmittelbar ab, dass die neue Größe q ebenfalls normalverteilt ist und zwar mit dem wahren Wert $(X + A)$ und der Breite σ_x.
Die absolute Unsicherheit hat sich also durch die Addition einer Konstanten nicht verändert, womit Gleichung (C.1.7) bestätigt ist.

C.3.11.4.2 Multiplikation mit einer Konstante

Aus einer gemessenen Größe x, die einer GAUSS-Verteilung mit wahrem Wert X und Standardabweichung σ_x gehorcht, soll eine neue Größe q dadurch berechnet werden, dass x mit einer Konstanten B multipliziert wird:

$$q := B \cdot x \quad . \tag{C.3.45}$$

[19] Ein Beispiel wäre die Verschiebung des Nullpunktes eines Maßbandes um $A = 3\,\mathrm{m}$.

Die Konstante B besitzt dabei selbst keine Unsicherheit.[20] Ganz ähnliche Überlegungen wie in Abschnitt C.3.11.4.1 liefern nun:

$$\begin{aligned}&(\text{Wahrscheinlichkeit, den Wert } q_1 \text{ für } q \text{ zu erhalten})\\ =\ &(\text{Wahrscheinlichkeit, den Wert } x_1 = \frac{q_1}{B} \text{ für } x \text{ zu erhalten}) \quad ,\end{aligned}$$

und somit auch

$$p(q_1) \propto \mathrm{e}^{\frac{-(x_1-X)^2}{2\sigma_x^2}} \tag{C.3.46}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{-(\frac{q_1}{B}-X)^2}{2\sigma_x^2}} \tag{C.3.47}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{-(q_1-B\cdot X)^2}{2(B\cdot\sigma_x)^2}} \quad . \tag{C.3.48}$$

Aus Gleichung (C.3.48) liest man unmittelbar ab, dass die neue Größe q ebenfalls normalverteilt ist und zwar mit dem wahren Wert $(B \cdot X)$ und der Breite $(B \cdot \sigma_x)$.
Somit ist Gleichung (C.1.8) ebenfalls bestätigt.

C.3.11.4.3 Addition zweier Messgrößen

Wir können nun die Addition zweier normalverteilter Messgrößen betrachten. Die Messgrößen seien x mit wahrem Wert X und Breite σ_x, sowie y mit wahrem Wert Y und Breite σ_y. Die neue Größe sei gegeben durch

$$q := x + y \quad . \tag{C.3.49}$$

Zur Vereinfachung der Formeln nehmen wir an, dass $X = Y = 0$ gilt. Das Ergebnis wird dadurch nicht beeinflusst, denn in Abschnitt C.3.11.4.1 haben wir ja bereits gezeigt, dass die Verschiebung des wahren Wertes die Breite der Verteilung nicht ändert.[21]
Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Wert x_1 von x zu erhalten, ist

$$p(x_1) \propto \mathrm{e}^{\frac{-x_1^2}{2\sigma_x^2}} \tag{C.3.50}$$

$$\tag{C.3.51}$$

und die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Wert y_1 von y zu erhalten, ist

$$p(y_1) \propto \mathrm{e}^{\frac{-y_1^2}{2\sigma_y^2}} \tag{C.3.52}$$

$$\tag{C.3.53}$$

[20] Beispiele wären die Bestimmung der Dicke eines Blattes Papier aus der Messung der Dicke eines Stapels mit 500 Blatt Papier oder die Berechnung des Umfangs eines Kreises aus seinem Radius.

[21] Wir könnten also in jedem Fall zwei neue Größen $(x - X)$ und $(y - Y)$ definieren, die dann tatsächlich um Null zentriert sind und die gleiche Unsicherheit aufweisen wie x und y selbst.

Die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Paar (x_1,y_1) zu erhalten, ist dann gerade das Produkt dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, also

$$p(x_1,y_1) \propto \mathrm{e}^{\frac{-x_1^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-y_1^2}{2\sigma_y^2}} \tag{C.3.54}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-x_1^2}{2\sigma_x^2}+\frac{-y_1^2}{2\sigma_y^2}\right)} \quad . \tag{C.3.55}$$

Zur weiteren Umformung benutzen wir folgende Hilfsformel:[22]

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \frac{(x+y)^2}{A+B} + \frac{(Bx-Ay)^2}{AB(A+B)} \tag{C.3.62}$$

$$= \frac{(x+y)^2}{A+B} + z^2 \tag{C.3.63}$$

mit

$$z := \frac{(Bx-Ay)^2}{AB(A+B)} \quad . \tag{C.3.64}$$

Der Wert von z ist nicht weiter von Interesse. Wählen wir nun $A = \sigma_x^2$ und $B = \sigma_y^2$, so erhalten wir

$$p(x_1,y_1) \propto \mathrm{e}^{\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}-\frac{z^2}{2}\right]} \quad . \tag{C.3.65}$$

Dies ist ebenfalls die Wahrscheinlichkeit dafür, einen bestimmten Wert (x_1+y_1) für $(x+y)$ zu erhalten und gleichzeitig einen bestimmten Wert für z. Da wir uns aber für den Wert von z nicht interessieren, können wir diese Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Werte

[22] Die Gültigkeit dieser Umformung lässt sich leicht zeigen:

$$\frac{(x+y)^2}{A+B} + \frac{(Bx-Ay)^2}{AB(A+B)} = \frac{AB(x^2+y^2+2xy)+B^2x^2+A^2y^2-2ABxy}{AB(A+B)} \tag{C.3.56}$$

$$= \frac{ABx^2+ABy^2+2ABxy+B^2x^2+A^2y^2-2ABxy}{AB(A+B)} \tag{C.3.57}$$

$$= \frac{x^2(AB+B^2)+y^2(AB+A^2)}{AB(A+B)} \tag{C.3.58}$$

$$= \frac{x^2B(A+B)+y^2A(A+B)}{AB(A+B)} \tag{C.3.59}$$

$$= \frac{Bx^2+Ay^2}{AB} \tag{C.3.60}$$

$$= \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} \quad . \tag{C.3.61}$$

von z integrieren. Wir bilden also das Integral

$$p(x_1 + y_1) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\left[-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)} - \frac{z^2}{2}\right]} \mathrm{d}z \tag{C.3.66}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\right] \mathrm{d}z \tag{C.3.67}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\right] \mathrm{d}z \tag{C.3.68}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} \cdot \sqrt{2\pi} \tag{C.3.69}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} \tag{C.3.70}$$

Die neue Größe q ist also wie erwartet ebenfalls normalverteilt, sie besitzt den wahren Wert $Q = 0$ und für die Breite σ_q gilt

$$\sigma_q^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad . \tag{C.3.71}$$

Lassen wir nun die Bedingung $X = Y = 0$ fallen, so können wir schreiben

$$q := x + y \tag{C.3.72}$$

$$= (x - X) + (y - Y) + (X + Y) \quad . \tag{C.3.73}$$

Für alle drei Terme bedeutet die Veränderung lediglich die Addition einer Konstante, für die wir ja in Abschnitt C.3.11.4.1 auf Seite 703 bereits gezeigt hatten, dass sie die Breite der Verteilung nicht ändert, sondern nur den wahren Wert um eben diese Konstante.
Wir haben also insgesamt die Gültigkeit von Gleichung (C.1.5) zumindest für die Addition zweier unabhängiger Größen nachgewiesen. Der allgemeinere Fall ist im nächsten Abschnitt enthalten.

C.3.11.4.4 Beliebige Funktion zweier Messgrößen

[redacted]

C.3.11.5 Die Standardabweichung des Mittelwerts ($\sigma_{\overline{x}}$) als bester Schätzwert für die Unsicherheit des Mittelwerts $\overline{x}$

Wir haben nun zwar die Standardabweichung σ_x als geeignetes Maß für die Unsicherheit einer Einzelmessung gerechtfertigt, aber noch interessanter ist eigentlich die Unsicherheit des Mittelwertes, denn diese geben wir ja beim Endergebnis eines Experimentes an. Erfreulicherweise ist es nun mit den bisher bewiesenen Zusammenhängen ganz leicht, auch die hierfür angegebene Formel (C.1.20) zu beweisen.

Wir gehen wieder von einer GAUSS-Verteilung der Messwerte von x aus. Der wahre Wert sei X und der Breiteparameter σ. Wir betrachten nun den Mittelwert $\overline{x}$ als neue Messgröße, die aus N ursprünglichen Messgrößen $x_1, \ldots, x_N$ auf die durch Gleichung (C.1.15) gegebene Weise berechnet wird:[23]

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N} \quad . \tag{C.3.74}$$

Der wahre Wert dieser neuen Größe (Zentralwert der Verteilung aller auf diese Weise berechneten Mittelwerte) ergibt sich zu

$$\frac{X + \ldots + X}{N} = X \quad . \tag{C.3.75}$$

Wir können nun mit Hilfe der Fehlerfortpflanzungsformel (C.1.11) auch die Breite der Verteilung angeben:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_1} \cdot \sigma_{x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_N} \cdot \sigma_{x_N}\right)^2} \tag{C.3.76}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{N} \cdot \sigma\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{N} \cdot \sigma\right)^2} \tag{C.3.77}$$

$$= \sqrt{N \cdot \frac{\sigma^2}{N^2}} \tag{C.3.78}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad . \tag{C.3.79}$$

Da wir σ nicht kennen, verwenden wir stattdessen den besten verfügbaren Schätzwert σ_x und erhalten so schließlich

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad , \tag{C.3.80}$$

wie in Gleichung (C.1.20) angegeben.

C.3.11.6 Die GAUSS-Verteilung als Näherung für die Binomialverteilung

[redacted]

C.3.12 Anpassen einer Funktion an Messwerte

C.3.12.1 Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Diese Methode wird in der englischsprachigen Literatur als *least squares fit* bezeichnet.

[23] Wenn wir die gesamte Messreihe mit jeweils N Messungen mehrfach wiederholen, so können wir den jeweils ersten Wert jeder Reihe quasi als eigene Messgröße betrachten. Das Gleiche gilt für den jeweils zweiten Wert usw. Die Unsicherheit jeder dieser Messgrößen ist natürlich σ.

C.3.12.2 Regressionsgerade

Die einfachste Funktion, die man an eine Schar von Messpunkten anpassen kann, ist eine Gerade. Viele Programme ermöglichen die Berechnung einer solchen sog. Regressions- oder Ausgleichsgerade. Die Rechnung ist nicht sonderlich schwierig und zur Not auch mit dem Taschenrechner gut durchführbar (was ja leider nicht für alle mathematischen Methoden gilt...).
Bei der Berechnung der Ausgleichsgeraden handelt es sich um ein Optimierungsproblem. Die Grundidee dabei ist, dass man von einem linearen Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variable x und der abhängigen Variable y ausgeht und dann die Gerade so berechnet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, genau die gemessenen Werte zu erhalten, maximal wird. Mit anderen Worten: bei jeder anderen Geraden wäre es weniger wahrscheinlich gewesen, ausgerechnet diese Messwerte zu erhalten.[24]
Die Formeln zur Berechnung der beiden Parameter der Gerade (Steigung und Achsenabschnitt) finden Sie in Abschnitt C.1.6 auf Seite 681.
... [redacted]

C.3.12.3 Nichtlinearer Kurvenfit

Natürlich lässt sich das Verfahren noch weiter verallgemeinern. Sofern man weiß oder zumindest vermutet, dass den Messwerten ein bestimmter funktionaler Zusammenhang zugrundeliegt (Exponentialfunktion, Sinusfunktion, ...), kann die Funktion unter Verwendung geeigneter Parameter (Zeitkonstante, Frequenz, Amplitude, ...) definiert werden. Die besten Schätzwerte für die Parameter lassen sich dann mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnen. Es können auch Funktionen mehrerer Variablen und Messpunkte mit unterschiedlichen Unsicherheiten betrachtet werden.
Je komplizierter die Funktion ist, desto aufwändiger wird natürlich auch die Berechnung der Schätzwerte. In vielen Fällen ist die Berechnung dann nicht mehr mit einer analytischen Formel möglich, sondern erfolgt numerisch.

Literaturverzeichnis

[Bir34] Birge, Raymond T.: *On Electric and Magnetic Units and Dimensions.* The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 2(2):41–48, 1934.

[Bir35a] Birge, Raymond T.: *On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part I.* The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 3(3):102–109, 1935.

[24] Im Grunde war auch schon unsere Berechnung des besten Schätzwertes $\overline{x}$ für X in Abschnitt C.3.11.2 auf Seite 699 eine Anpassung einer Funktion an Messwerte, nämlich die Anpassung einer konstanten Funktion. In diesem Fall gab es natürlich als einzigen zu bestimmenden Parameter die Konstante selbst, sozusagen den Achsenabschnitt einer Geraden mit Steigung Null. Wir verallgemeinern dieses Verfahren nun zunächst auf zwei Parameter, die den Achsenabschnitt und die Steigung einer Gerade darstellen.

[Bir35b] Birge, Raymond T.: *On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part II.* The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 3(4):171–179, 1935.

[Bri31] Bridgman, Percy Williams: *Dimensional Analysis.* Yale University Press, New Haven / Connecticut, rev. edition, 1931. first published November 1922, revised edition March 1931, issued as a Yale Paperbound January 1963.

[BS85] Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 22. Auflage, 1985.

[fNB95] Normung e. V., DIN Deutsches Institut für (Herausgeber): *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen – Deutsche Übersetzung des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“.* Beuth Verlag GmbH, Berlin · Wien · Zürich, 1. Auflage, 1995.

[Gör75] Görtler, Henry: *Dimensionsanalyse.* Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 1975.

[Hil78] Hiller, Eduard: *Theonis Smyrnaei – Philosophi Platonici – Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium.* Teubner, Lipsiae (Leipzig), 1878.

[Kie94] Kienle, Lothar: *Größen – Größenkalkül – Dimensionsanalyse — 8 Aufsätze.* Franzbecker, Hildesheim, 1. Auflage, 1994.

[Oxt34] Oxtoby, John C.: *What Are Physical Dimensions?* The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 2(3):85–90, 1934.

[Par64] Parkinson, Michael: *An axiomatic approach to dimensions in physics.* Am. J. Phys., 32(3):200–205, 1964.

[Run16] Runge, C.: *Über die Dimensionen physikalischer Größen.* Physikalische Zeitschrift, 17:202–212, 1916.

[Smyhr] Smyrnaei, Theonis: *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium.* ca. 100 n. Chr.

[Tay82] Taylor, John R.: *An Introduction to Error Analysis - The Study of Uncertainties in Physical Measurements.* University Science Books, 55D Gate Five Road, Sausalito, CA 94965, USA, 1. edition, 1982.

[Tay88] Taylor, John R.: *Fehleranalyse - Eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen.* VCH Verlagsgesellschaft mbH, 6940 Weinheim, Bundesrepublik Deutschland, 1. Auflage, 1988.

[Tay97] Taylor, John R.: *An Introduction to Error Analysis - The Study of Uncertainties in Physical Measurements.* University Science Books, 55D Gate Five Road, Sausalito, CA 94965, USA, 2. Auflage, 1997.