3.10. Wärmeleitung

Ziel

Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit und der Lorenzzahl von Metallen mit zwei unterschiedlichen Verfahren:

1. instationäre Messmethode (= „Wärmewellen-Methode“)
2. stationäre Messmethode

Hinweise zur Vorbereitung

Die Antworten auf diese Fragen sollten Sie vor der Versuchdurchführung wissen. Sie sind die Grundlage für das Gespräch mit Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor vor dem Versuch. Informationen zu diesen Themen erhalten Sie in der unten angegebenen Literatur.

1.
   - Welche Möglichkeiten der Wärmeausbreitung gibt es?
   - Welche dieser Möglichkeiten ist in welchem Versuchsteil relevant?
   - Worüber ist die Wärmeleitfähigkeit definiert?
   - Was besagen das I. und II. ficksche Gesetz der Diffusion?
   - Wie lautet das wiedemann-franz-lorenzsches Gesetz? Was ist die Lorenzzahl?
   - Was ist die Phasen-, was die Gruppengeschwindigkeit einer Welle?
   - Wie funktioniert ein Thermoelement?

Zubehör

- Kupferstab (Durchmesser $d = 6\,\mathrm{mm}$) mit regelbarer elektrischer Heizung an einem Ende und einem Gefäß mit Eiswasser am anderen Ende
- drei Thermoelemente zur Temperaturmessung an verschiedenen Stellen des Kupferstabes
- programmierbares Netzgerät („SSP-Konstanter“) für die Heizung
- elektronisches Thermometer
- Dreikanalschreiber

last change to this section: Revision: 798 , Date: 2017-04-03 16:57:15 +0200 (Mo, 03 Apr 2017)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Grundlagen

Die Wärmeleitungsgleichung

Die Gesetze der Wärmeleitung wurden schon im Jahr 1822 durch Fourier hergeleitet. Damals glaubte man noch an einen „Wärmestoff“, dessen Diffusion in einem Temperaturgefälle vergleichbar wäre mit der Diffusion von Stoffen in einem Konzentrationsgefälle. Diese Annahme hat sich zwar später als falsch herausgestellt, aber die mathematische Beschreibung der beiden Phänomene ist so ähnlich, dass das Ergebnis trotzdem richtig war.
Fourier betrachtete einen zylindrischen Stab mit Querschnitt A, der durch geeignete Maßnahmen gegen seitliche Wärmeverluste geschützt sein sollte. Wenn an zwei Stellen x und $x + \mathrm{d}x$ mit hinreichend kleinem Abstand die Temperaturen T bzw. $T + \mathrm{d}T$ herrschen, so nahm Fourier aufgrund experimenteller Befunde an, dass der Wärmefluss $\Phi = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ proportional zum Temperaturgradienten $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ und zur Querschnittsfläche A sein müsste.[1] Die Proportionalitätskonstante λ nennt man Wärmeleitfähigkeit. Es gilt also

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \quad . \tag{3.10.2}$$

Die vollständige Beschreibung der räumlichen und zeitlichen Veränderung der Temperatur wird durch die allgemeine Wärmeleitungsgleichung[2] geliefert:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.10.4}$$

[1] Im dreidimensionalen Fall müsste man schreiben

$$\vec{j} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T \tag{3.10.1}$$

mit

$$\vec{j} = \text{Wärmestromdichte} \quad .$$

[2] Auch diese Gleichung kann noch wesentlich verallgemeinert werden. Betrachtet man den dreidimensionalen Fall und lässt zu, dass überall im Raum Wärmequellen vorhanden sind, so ergibt sich für jeden Ort $\vec{r}$:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varrho \cdot c} \cdot \left(-\vec{\nabla}\vec{j} + \eta\right) = \frac{\lambda}{\varrho \cdot c} \vec{\nabla}^2 T + \frac{1}{\varrho \cdot c} \cdot \eta \tag{3.10.3}$$

mit

$$\eta = \text{lokale Wärmequelldichte (= Wärmeerzeugungsleistung/Volumen).}$$

Schließlich kann die Wärmeleitfähigkeit λ selbst noch vom Ort und der Temperatur abhängen. Durch solche Verallgemeinerungen wird das Lösen der Gleichung allerdings sehr schnell sehr kompliziert und sprengt sicherlich den Rahmen eines Anfängerpraktikums.

mit

$$\varrho = \text{Dichte},$$
$$c = \text{spezifische Wärmekapazität}.$$

Instationäre Messmethoden: „Temperaturwellen" und „Wärmepulse"

Bei den instationären Methoden wird unter Verwendung von Gleichung (3.10.4) zunächst die sog. „Temperaturleitfähigkeit"[3] $\frac{\lambda}{\varrho \cdot c}$ gemessen. Sind die Dichte ϱ und die spezifische Wärmekapazität c bekannt, so kann daraus natürlich die Wärmeleitfähigkeit berechnet werden.[4]
Die älteste Variante der instationären Methode wurde bereits 1861 von Ångström beschrieben. Dabei wird das eine Ende einer möglichst langen zylindrischen Probe auf einer konstanten Temperatur gehalten, während das andere Ende sinusförmig periodisch geheizt wird. Man erhält für diesen Fall einer periodischen Randbedingung als Lösung der Differentialgleichung der Wärmeleitung (3.10.4) eine „Temperaturwelle".[5] Misst man an zwei Stellen mit bekanntem Abstand sowohl die Amplitude der Temperaturänderungen als auch deren Phasenverschiebung zwischen den beiden Messorten, so kann man daraus die Temperaturleitfähigkeit bestimmen. Die spezifische Wärmekapazität und die Dichte des Stoffes müssen wie bereits oben erwähnt aus anderen Versuchen bekannt sein, um die Wärmeleitfähigkeit zu berechnen.
Der Einfachheit halber wird im Praktikum diese Methode eingesetzt.
Eine modernere Variante der instationären Methode nutzt eine einmalige kurzzeitige Aufheizung eines Probenendes, quasi einen „Wärmepuls". Misst man den dadurch verursachten Temperaturanstieg in Abhängigkeit von Ort x und Zeit t, so erhält man aus dem Temperaturanstieg die Temperaturleitfähigkeit $\frac{\lambda}{\varrho \cdot c}$ und zusätzlich aus dem Maximum der Temperatur auch noch die spezifische Wärmekapazität c.
Ein weiterer Vorteil der „Pulsmethode" ist die insgesamt geringere Wärmezufuhr an die Probe. Dies ist insbesondere bei sehr tiefen Temperaturen ein wichtiger Gesichtspunkt.

Stationäre Messmethoden

Stationäre Methoden messen unter Verwendung von Gleichung (3.10.2) die Wärmeleitfähigkeit λ. Dazu muss allerdings der Wärmestrom im Stab bekannt sein, d. h. man muss u. U. geeignete Maßnahmen ergreifen, um die zugeführte Wärme auch wirklich nur durch den Stab abzuleiten. Dies ist im Praktikumsversuch nicht der Fall, sondern es wird ein Teil der Wärme auch auf anderem Weg abgeführt.

[3] Man findet in der Literatur auch die Bezeichnungen „Temperaturleitwert" und „Temperaturleitzahl".
[4] Da feste Metalle untersucht werden, ist die spezifische Wärmekapazität c_p bei konstantem Druck einzusetzen.
[5] Man findet in der Literatur auch den Begriff „Wärmewelle".

Das wiedemann-franz-lorenzsche Gesetz

Diese im Jahr 1872 gefundene Beziehung[6] beschreibt den Zusammenhang zwischen der Wärmeleitfähigkeit λ und der elektrischen Leitfähigkeit σ von Metallen. Die Beziehung lautet:

$$\frac{\lambda}{\sigma \cdot T} = \text{const.} \tag{3.10.5}$$

Die Konstante wird auch als Lorenzzahl bezeichnet. Spätere Arbeiten von Sommerfeld und Bloch zur Quantenmechanik ermöglichen es, den theoretischen Wert dieser Konstante zu berechnen, so dass man schreiben kann:

$$\frac{\lambda}{\sigma \cdot T} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_\mathrm{B}^2}{e^2} \approx 2.443 \cdot 10^{-8} \, \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{K}^2} \quad . \tag{3.10.6}$$

Dieser Wert wird experimentell für viele Metalle über einen großen Temperaturbereich relativ gut bestätigt. Abweichungen sind u. a. darauf zurückzuführen, dass die verfügbaren Messwerte für elektrische und Wärmeleitfähigkeit oft nicht von der selben Probe stammen, so dass Unterschiede im Grad der Reinheit und der Kristallqualität möglich sind. Außerdem beschreibt das Gesetz nur den elektronischen Anteil der Wärmeleitung. Trägt das Gitter in wesentlichem Maß zur Wärmeleitung bei, wie das bei bestimmten Metalllegierungen (z. B. Neusilber oder rostfreier Stahl) sowie bei Halbleitern der Fall ist, so sind Abweichungen zu erwarten [Gob74].

Versuchsdurchführung

Die Bedienung des elektronischen Steuergerätes für den Heizstrom ist etwas gewöhnungsbedürftig, aber nicht wirklich schwierig. Es handelt sich im Grunde um ein Gleichspannungsnetzgerät, das zum einen manuell geregelt werden kann (Versuchsteil II), das aber auch mit Hilfe einer frei programmierbaren Wertetabelle einen zeitlich veränderlichen Strom liefern kann (Versuchsteil I).

Während des ganzen Versuches wird ein Stabende mit Eiswasser gekühlt, um es auf einer definierten Temperatur zu halten.

Teil I: periodisch schwankende Heizleistung[7]

1. Messen Sie die Abstände zwischen den Thermoelementen.

[6] Sie wird oft auch nur als wiedemann-franzsches Gesetz bezeichnet.

[7] Der im Netzgerät einprogrammierte zeitliche Verlauf der Heizspannung entspricht einer sinusförmigen Halbwelle für die Heizspannung gefolgt vom Wert Null für den Rest der Periode. Dies führt nur näherungsweise zu einem sinusförmigen Verlauf der Temperatur am heißen Ende, wie er in der Berechnung der Temperaturwellen angenommen wird. Die Abweichungen sind aber im Rahmen des Praktikums akzeptabel.

2. Heizen Sie den Stab periodisch mit verschiedenen Periodendauern.[8]

3. Nehmen Sie mit Hilfe des Dreikanalschreibers und der drei Thermoelemente die entsprechenden Temperaturkurven auf.

   Hinweise:

   - Die Schreibergeschwindigkeit soll 3 cm/min betragen.
   - Der Dreikanalschreiber hat einen Schalter, der mit „`PEN SYNC`" beschriftet ist. Dieser Schalter hat folgende wichtige Funktion:

     Auf dem Papier sollen die Signale der drei Kanäle so aufgezeichnet werden, dass gleichzeitig gemessene Werte auch an der gleichen t-Position des Papiers liegen. Natürlich können die drei Stifte nicht wirklich gleichzeitig an der gleichen Stelle schreiben, sondern müssen gegeneinander etwas versetzt sein, um sich nicht mechanisch zu behindern. Der so entstandene gegenseitige Versatz der gezeichneten Kurven kann dadurch aufgehoben werden, dass die Signale des zweiten und dritten Kanals zeitlich geeignet verzögert werden. Die nötige Verzögerungszeit ist direkt proportional zur räumlichen Verschiebung der Schreibstifte und umgekehrt proportional zur Vorschubgeschwindigkeit. Die Schreibspuren der verschiedenen Stifte werden somit quasi „synchronisiert".

     Bei der Einstellung des Messbereichs ist diese Funktion allerdings eher lästig, da Änderungen an Empfindlichkeit und Offset erst mit der entsprechenden Verzögerung sichtbar werden. Deshalb ist die Funktion auch abschaltbar.

Teil II: zeitlich konstante Heizleistung

4. Messen Sie den Abstand zwischen dem Thermoelement bei der Heizung und dem Eisbad.

5. Heizen Sie den Stab mit stufenweise steigender Leistung, indem Sie den Strom in mehreren Schritten von $I = 1.2\,\mathrm{A}$ auf $I = 1.5\,\mathrm{A}$ erhöhen.

   Notieren Sie jeweils auch die Heizspannung U, um später die Heizleistung berechnen zu können.

   Bestimmen Sie für jede Heizleistungsstufe nach einer genügend langen Wartezeit jeweils mit dem elektronischen Thermometer die Gleichgewichtstemperatur beim Thermoelement am geheizten Stabende.

6. Verringern Sie die Heizleistung stufenweise wieder. Verwenden Sie dabei die gleichen Stromstärken wie bei Punkt 5 und messen Sie jeweils in gleicher Weise die sich einstellende Gleichgewichtstemperatur.

[8] Geeignete Werte für die Kreisfrequenz sind $0.05\,\mathrm{s}^{-1} \leq \omega \leq 0.15\,\mathrm{s}^{-1}$. Der zeitliche Verlauf wird im Netzgerät durch 50 einzeln einprogrammierte Stromwerte dargestellt. Die Zeitdauer t_def für den jeder dieser Stromwerte gehalten wird kann eingestellt werden und bestimmt die Kreisfrequenz der Heizfunktion durch $\omega = 2\pi/(50 \cdot t_\mathrm{def})$. Geeignet sind somit Werte mit $2.51\,\mathrm{s} \geq t_\mathrm{def} \geq 0.84\,\mathrm{s}$.

Hinweis: Eigentlich würde man hier die gleichen Werte erwarten wie bei Punkt 5. Allerdings erreicht man selbst bei längerer Wertezeit meist noch nicht den wirklichen Gleichgewichtszustand. Aus der Differenz der beiden Temperaturen für den gleichen Heizstrom bei steigender bzw. fallender Heizleistung können Sie die Messunsicherheit abschätzen.

Auswertung Teil I: periodisch schwankende Heizleistung

1. Bestimmen Sie aus den Messungen mit periodisch schwankender Heizleistung (Punkte 2 bis 3 der Versuchsdurchführung) die Phasengeschwindigkeit der Temperaturwellen und ihre Dämpfung im verwendeten Kupferstab.

2. Berechnen Sie sowohl aus der Phasengeschwindigkeit als auch aus der Dämpfung der Temperaturwellen die Wärmeleitfähigkeit λ des verwendeten Materials.

   Hinweis: Die Werte für die Dichte und die spezifische Wärme von Kupfer finden Sie z. B. in [Lid02].

Teil II: zeitlich konstante Heizleistung

3. Bezeichnet man mit η den „Wirkungsgrad der Heizung", also den Anteil der elektrisch zugeführten Leistung, der als Wärmestrom im Stab weitergeleitet wird, so lässt sich Gleichung (3.10.2) schreiben als

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \eta \cdot U \cdot I = -\lambda \cdot A \frac{\triangle T}{\triangle x} \tag{3.10.7}$$

   mit

$$\begin{aligned} U &= \text{Heizspannung,} \\ I &= \text{Heizstrom,} \\ \triangle T &= \text{Temperaturdifferenz zwischen Thermoelement} \\ &\quad\ \text{am geheizten Stabende und Eisbad,} \\ \triangle x &= \text{Länge des Stabes vom Thermoelement} \\ &\quad\ \text{am geheizten Stabende bis zum Eisbad.} \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie unter Verwendung der in Punkt 2 berechneten Werte für die Wärmeleitfähigkeit λ den „Wirkungsgrad" η.

Fragen und Aufgaben

1. Warum erhält man aus der Phasengeschwindigkeit i. d. R. genauere Werte für die Wärmeleitfähigkeit als aus der Dämpfung?

2. Wenn eine besonders hohe Wärmeleitfähigkeit nötig ist, verwendet man oft ein sog. „Wärmerohr" (⟨engl.⟩ *heatpipe*).

   Wie ist eine solche Anordnung aufgebaut und wie funktioniert sie?

Ergänzende Informationen

Erdtemperatur

Die Ausbreitung zeitlicher Temperaturschwankungen von der Oberfläche eines festen Körpers in diesen hinein ist von besonderem Interesse bei den jährlichen und täglichen Schwankungen der Temperatur auf und in der Erde. Eine detailliertere Rechnung zu dieser Fragestellung finden Sie z. B. in [Som78]. Hier nur einige wesentliche Ergebnisse:
Natürlich ist die Wärmeleitung abhängig von der Art des Erdbodens (Fels, Sand, Lehm, ...). Geht man zur Vereinfachung zunächst von einer „mittleren Erdsorte" aus, so liefert die Wärmeleitungsgleichung das Ergebnis, dass für die jährlichen Temperaturschwankungen schon in einer Tiefe von $\approx 4\,\mathrm{m}$ die erste und hauptsächliche Partialwelle in der Phase um π verschoben ist, d. h. die Temperatur ist dort im Winter tatsächlich höher als im Sommer. Die Schwankungen sind dabei relativ klein, ihre Amplitude ist etwa um den Faktor 16 geringer als an der Oberfläche. Höhere Partialwellen werden noch stärker verzögert und gedämpft. Man sagt, die Erde wirkt als „harmonischer Analysator", indem sie aus einem Gemisch von Partialwellen die Grundschwingung heraussiebt (wenn auch stark gedämpft). Der Nutzen eines tiefen Kellers oder dicker Kirchenmauern besteht nicht zuletzt in dieser Wirkung auf die Temperaturschwankungen.
Da die tageszeitlichen Schwankungen der Temperatur um den Faktor ≈ 365 schneller erfolgen, dringen diese Schwankungen nur um den Faktor $\approx \sqrt{365} \approx 19$ weniger tief in die Erde ein. Schon in einer Tiefe von $\approx \frac{4\,\mathrm{m}}{19} \approx 19\,\mathrm{cm}$ sind die Schwankungen kaum mehr spürbar.
Das Phänomen, dass die Temperaturschwankungen nur auf eine relativ dünne Oberflächenschicht begrenzt bleiben, ist analog zum sog. „*Skineffekt*"[9] bei hochfrequenten Wechselströmen.

Literaturhinweise

stationäre und instationäre Messmethode (Temperaturwellen): [Gob74] (Achtung: nicht in allen Auflagen), [Dem98]
Tabellenwerte: [Lid02]
speziell zum experimentellen Aufbau im Anfängerpraktikum: [Sch94] (liegt im Praktikum aus)
theoretische Behandlung insbesondere der Erdtemperatur: [Som78]

Literaturverzeichnis

[Dem98] DEMTRÖDER, WOLFGANG: *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme.* Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1998.

[9] Vor allem früher auch manchmal als „Hauteffekt" bezeichnet. Der Begriff leitet sich von ⟨engl.⟩ *skin* = Haut ab.

[Gob74] GOBRECHT, HEINRICH: *Bergmann-Schaefer – Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band I: Mechanik, Akustik, Wärme. Walter de Gruyter, Berlin, 9. Auflage, 1974.

[Lid02] LIDE, DAVID R. (editor): *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, Boca Raton · London · New York · Washington, D.C., 83. edition, 2002.

[Sch94] SCHLIEWE, HARTMUT: *Temperaturwellen – Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit und der Lorenzzahl von Metallen*. Diplomarbeit, Staatsexamensarbeit, Universität Konstanz, 1994.

[Som78] SOMMERFELD, ARNOLD: *Vorlesungen über theoretische Physik*, Band VI. Verlag Harri Deutsch, Thun · Frankfurt/M., 6. Auflage, 1978.