2.14. Torsionsoszillator (für Studiengang Physik)

Ziel

Die Studierenden sind mit freien, gedämpften und erzwungenen mechanischen Schwingungen vertraut. Sie kennen die Bedeutung von Eigen(kreis)frequenz, Resonanz(kreis)frequenz und den Verlauf einer Resonanzkurve. Außerdem wissen sie, wie sich ein gedämpftes System verhält.

Hinweise zur Vorbereitung

Der Versuch wird zweitägig druchgeführt. Bringen Sie am zweiten Versuchstag die Unterlagen des ersten Versuchstags mit. Sie benötigen diese!
Die Antworten auf folgende Fragen sollten Sie vor der Versuchdurchführung wissen. Sie sind die Grundlage für das Gespräch mit Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor vor dem Versuch. Informationen zu diesen Themen erhalten Sie in der unten angegebenen Literatur.
Teil 1–4

- Was ist eine Torsionsfeder?
- Was ist ein Drehmoment?
- Was muss gegeben sein, damit eine harmonische Schwingung vorliegt?
- Warum ist die Schwungscheibe aus Kupfer?
- Wie ändert sich die Periodendauer, wenn Gewichte auf die Schwungscheibe gelegt werden?

Teil 5

- Was ist eine erzwungene Schwingung?
- Wieso sollte bei der erzwungenen Schwingung nicht gleich nach Einschalten der Anregung gemessen werden?
- Wie sieht (qualitativ) eine Resonanzkurve aus? Wo befindet sich deren Maximum?
- Wie unterscheiden sich Eigenkreisfrequenz und Resonanzkreisfrequenz der Amplitude und somit Eigenfrequenz und Resonanzfrequenz?
- Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Anregung und schwingendem System bei der Eigenfrequenz, bei sehr kleinen Anregungsfrequenzen und bei sehr hohen Anregungsfrequenzen?

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Zubehör

- TeachSpin *Torsional Oscillator* mit folgendem Zubehör:
  - 2 Umlenkrollen
  - Angelschnur
  - je 2 Gewichte à 50 g – 400 g
  - 8 Hohlzylinderviertel aus Messing
  - 8 Stahlkugeln
- Sinusgenerator
- Rigol digitales Speicheroszilloskop
- Messschieber
- USB-Stick
- 2 Kabel: BNC — BNC
- 2 Kabel: 4 mm Federstecker — 4 mm Federstecker

Grundlagen

Der Torsionsoszillator

Abbildung 2.14.1 zeigt die zur Beschreibung wichtigen Teile des Torsionsoszillators der Firma TeachSpin. Der Torsionsoszillator besteht im Wesentlichen aus einer Schwungscheibe aus Kupfer, die an einem Stahldraht, der sog. Torsionsfeder oder dem sog. Torsionsfaden aufgehängt ist. Diese Schwungscheibe kann um etwa $\pm$ 90° aus ihrer vertikalen Achse ausgelenkt und zu Schwingungen angeregt werden. Über eine Welle aus Aluminium können mit Hilfe einer Angelschnur Gewichte außerhalb des Gehäuses angebracht werden, die den Oszillator permanent statisch auslenken. Alternativ kann der Torsionsoszillator über einen Sinusgenerator zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden, indem das Spulenpaar mit dem Signal des Sinusgenerators gespeist wird und den Permanentmagneten auf der Welle auslenken.
Mit Hilfe von Hohlzylindervierteln aus Messing oder Stahlkugeln kann das Trägheitsmoment des Torsionsoszillators gezielt verändert werden. Die Hohlzylinderviertel sind so konstruiert, dass sie über Aufsteckstutzen auf die Schwungscheibe gut haltbar aufgesteckt werden können. Die Kugeln können in Mulden auf der Schwungscheibe gelegt werden.
Seitlich an der Schwungscheibe angebrachte Magnetschuhe aus Permanentmagneten dienen dazu, die Scheibe bei Bedarf mit Hilfe von induzierten Wirbelströmen zu bremsen und somit eine gedämpfte Schwingung zu erzeugen.
Die elektronische Bestimmung der Auslenkung erfolgt über einen Kondensator, der je nach Auslenkung seine Kapazität verändert.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

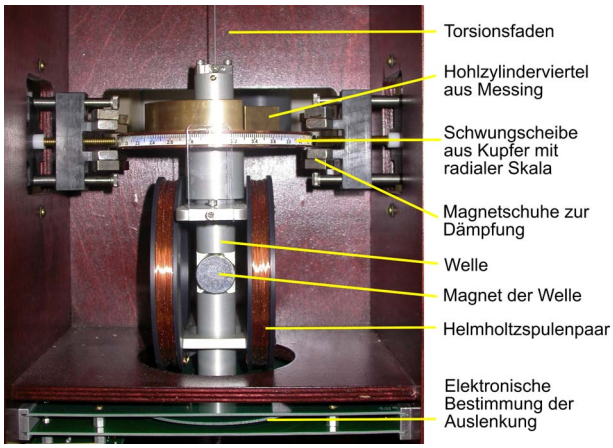

Abbildung 2.14.1.: Foto des Versuchsaufbaus Torsionsoszillator mit Beschriftung der wichtigsten Teile. Die Gewichte werden seitlich außerhalb des Gehäuses angebracht und sind hier nicht zu sehen.

Das Trägheitsmoment

Rotiert ein starrer Körper um eine raumfeste Drehachse, so besitzen alle Punkte des Körpers die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω. Für die Geschwindigkeit v_i eines einzelnen Punkts x_i gilt dann

$$v_i = \omega \cdot r_i, \tag{2.14.1}$$

wobei r_i für den senkrechten Abstand des Punkts zur Drehachse steht. Bei dieser nicht-vektoriellen Schreibweise ist zu beachten, dass die Drehachse, der Abstand des Punkts x_i von der Drehachse und die Richtung der Geschwindigkeit v_i senkrecht aufeinander stehen. Die Rotationsenergie E_{rot} bei insgesamt N Massenpunkten mit den Einzelmassen m_i lässt sich berechnen über

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \Theta \omega^2. \end{aligned} \tag{2.14.2}$$

$\Theta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ heißt Trägheitsmoment eines Körpers und ist abhängig von der Position der Drehachse. Gleichung 2.14.2 ist sehr ähnlich zur Formel $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ für die kinetische Energie, so dass bei einer Rotationsbewegung die Winkelgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit einer Vorwärtsbewegung und das Trägheitsmoment mit der Masse bei einer Vorwärtsbewegung verglichen werden kann. Ist das Trägheitsmoment Θ_S um eine Achse durch den Schwerpunkt bekannt, so lässt sich das Trägheitmoment Θ_b um eine dazu parallele (!) Achse mit Hilfe des Satzes von Steiner berechnen:

$$\Theta_b = \Theta_S + m \cdot b^2, \tag{2.14.3}$$

wobei m die Gesamtmasse des Körpers bezeichnet und b den Abstand der beiden parallelen Achsen. Die für diesen Versuch wichtigen Trägheitsmomente sind das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders (bzw. eines Hohlzylinderviertels), der um seine Körperachse rotiert und das einer Kugel, die um eine Achse durch ihren Schwerpunkt rotiert:

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{Hohlzylinder(viertel)}} &= \frac{1}{2}\, m(r^2_{\text{innen}} + r^2_{\text{außen}})\\ \Theta_{\text{Kugel}} &= \frac{2}{5}\, mr^2.\end{aligned}$$

Dabei sind r_{innen} und $r_{\text{außen}}$ der Innen- bzw. Außenradius des Hohlzylinder(viertel)s und r der Kugelradius. Detaillierte Berechnungen von Trägheitsmomenten finden Sie in der Versuchsanleitung zum Trägheitsmoment aus Drehschwingungen (Kapitel 2.3 auf Seite 61). Abbildung 2.14.2 zeigt eine schematische Aufsicht auf den schwingenden Teil des Torsionsoszillators. In rot-braun ist die Schwungscheibe dargestellt, in grau die Welle. Das Trägheitsmoment Θ_0 des gesamten Rotationskörpers des Torsionsoszillators setzt sich näherungsweise aus den Trägheitsmomenten der Schwungscheibe Θ_{S} und der Welle Θ_{W} zusammen. Sowohl bei der Schwungscheibe als auch bei der Welle handelt es sich um einen Hohlzylinder, so dass

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= \Theta_{\text{S}} + \Theta_{\text{W}}\\ &= \frac{1}{2}\, m_{\text{S}}(R_{\text{i}}^2 + R_{\text{a}}^2) + \frac{1}{2}\, m_{\text{W}}(r_{\text{i}}^2 + r_{\text{a}}^2)\end{aligned} \tag{2.14.4}$$

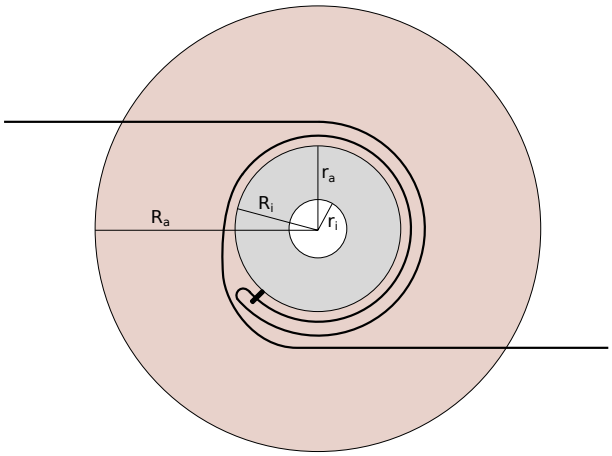

Abbildung 2.14.2.: Aufsicht auf den Torsionsoszillator mit Bezeichnungen. Befestigung der Angelschnur.

Die Bedeutung der Radien kann Abbildung 2.14.2 entnommen werden. m_{S} ist die Masse der Schwungscheibe, m_{W} die Masse der Welle.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Die Torsionskonstante, statisch bestimmt

Ähnlich einer Federkonstanten beim Federpendel existiert auch beim Torsionsoszillator eine materialabhängige Konstante, welche die rücktreibende Wirkung beschreibt. Diese sog. Torsionskonstante $\widetilde{D}$ kann beim Torsionsoszillator sowohl statisch ($\widetilde{D}_{\mathrm{stat}}$), als auch dynamisch ($\widetilde{D}_{\mathrm{dyn}}$) bestimmt werden. Sie beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen dem Verdrillwinkel φ der Torsionsfeder und dem sich daraus ergebenden Torsionsmoment M_{t},

$$M_{\mathrm{t}} = -\widetilde{D} \cdot \varphi.$$

Dieses Torsionsmoment ist gegengleich dem Betrag des Drehmoments $\vec{M}_{\mathrm{d}}$, welches aufgrund der Verdrillung wirkt, d. h. $M_{\mathrm{t}} = -|\vec{M}_{\mathrm{d}}|$. Allgemein ist das Drehmoment gegeben durch

$$\vec{M}_{\mathrm{d}} = \vec{r} \times \vec{F},$$

wobei

$$\vec{r} = \text{Abstandsvektor zur Drehachse,}$$
$$\vec{F} = \text{Kraft, die an dieser Stelle angreift.}$$

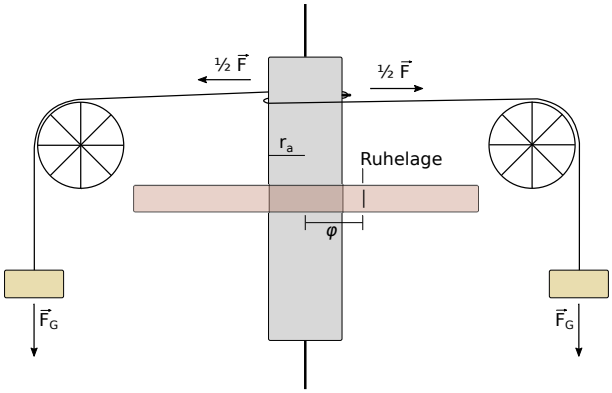

Abbildung 2.14.3.: Vereinfachte Seitenansicht des Torsionsoszillators.

Im Fall des Torsionsoszillators verdeutlicht Abbildung 2.14.3 die Situation für die statische Bestimmung der Torsionskonstanten: Der Betrag $|\vec{r}|$ ist der Außenradius r_{a} der Welle. Die Schwungscheibe wird durch die Kraft $\vec{F}$ statisch ausgelenkt und schwingt nicht. Die Kraft $\vec{F}$ setzt sich aus zwei betraglich gleich großen Komponenten F_{G} zusammen, wobei $F_{\mathrm{G}} = mg$ die Gewichtskraft eines der angehängten Gewichte mit Masse m ist. g bezeichnet die Erdbeschleunigung. Da die Schnur tangential an der Welle anliegt, stehen $\vec{r}$ und $\vec{F}$ senkrecht aufeinander. Mit diesen Erkenntnissen gilt zusammenfassend

$$\widetilde{D}_{\mathrm{stat}} \cdot \varphi = r_{\mathrm{a}} \cdot 2mg.$$

Damit ist der (statische) Verdrillwinkel proportional zur angehängten Masse.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Die Schwingungsgleichung und die dynamische Bestimmung der Torsionskonstanten

Lenkt man die Schwungscheibe aus und lässt sie frei schwingen, so kann die Torsionskonstante dynamisch bestimmt werden. Durch Betrachtung der Drehmomente am Torsionsoszillator erhält man eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für den zeitlich veränderlichen Verdrillwinkel $\varphi(t)$. Sie besteht aus einem Beschleunigungsterm $\Theta \cdot \ddot{\varphi}(t)$, einem Dämpfungsterm $\widetilde{k} \cdot \dot{\varphi}(t)$ und dem rücktreibenden Moment der Torsionsfeder $\widetilde{D}_{\mathrm{dyn}} \cdot \varphi(t)$:

$$\Theta \cdot \ddot{\varphi}(t) + \widetilde{k} \cdot \dot{\varphi}(t) + \widetilde{D}_{\mathrm{dyn}} \cdot \varphi(t) = 0 \tag{2.14.5}$$

mit

$$\begin{aligned} \Theta &= \text{Trägheitsmoment des gesamten schwingenden Systems,} \\ \widetilde{k} &= \text{Reibungskonstante,} \\ \widetilde{D}_{\mathrm{dyn}} &= \text{dynamisch bestimmte Torsionskonstante,} \end{aligned}$$

oder nach Division der gesamten Gleichung durch Θ in etwas anderer Schreibweise:

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\, \dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\, \varphi(t) = 0 \tag{2.14.6}$$

mit

$$2\beta := \frac{\widetilde{k}}{\Theta} \tag{2.14.7}$$

$$\omega_0^2 := \frac{\widetilde{D}_{\mathrm{dyn}}}{\Theta} \tag{2.14.8}$$

β heißt Dämpfungs- oder Abklingkonstante und ω_0 heißt Eigenkreisfrequenz[1] des ungedämpften Schwingers. Weiterhin definiert man sich zwei nützliche Abkürzungen:

$$\omega_{\mathrm{g}} := \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{und} \tag{2.14.9}$$

$$\Gamma := \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \mathrm{i} \cdot \omega_{\mathrm{g}} \quad . \tag{2.14.10}$$

ω_{g} wird sich im Folgenden als Kreisfrequenz der freien *gedämpften* Schwingung herausstellen.

[1] In der Literatur wird ω_0 häufig auch als Eigenfrequenz oder ω als Frequenz bezeichnet. Hier muss darauf geachtet werden, dass keine Verwechslung mit der tatsächlichen Frequenz, die meist mit dem Buchstaben f oder ν bezeichnet wird, auftritt. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ist durch $\omega = 2\pi \cdot f$ gegeben. Eigenkreisfrequenz ist ein etwas sperriger Begriff. Vielleicht ist deshalb die Sprechweise an dieser Stelle meist ungenau. Eine Verwechslung ist trotzdem so gut wie ausgeschlossen, solange die Formelzeichen eindeutig verwendet werden. Aus diesem Grund sollten auch die Einheiten dieser beiden Größen unterschieden werden: $[f] = [\nu] = 1\,\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$, $[\omega] = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Vereinfacht schreibt man allerdings meist $[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}$.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Als Anfangsbedingungen werden der Auslenkungswinkel und die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgegeben:

$$\begin{cases} \varphi(0) &=: A_1 \\ \dot{\varphi}(0) &=: A_2 \end{cases} \tag{2.14.11}$$

Ein allgemeiner Lösungsansatz lautet

$$\varphi(t) = B_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad , \tag{2.14.12}$$

wobei B_1, B_2, λ_1 und λ_2 komplexwertige Konstanten sind. Leitet man den Ansatz (2.14.12) zweimal ab und setzt alles in die Schwingungsgleichung (2.14.6) ein, so ergeben sich zunächst Bestimmungsgleichungen für λ_1 und λ_2. Zusammen mit den Anfangsbedingungen in (2.14.11) können schließlich auch B_1 und B_2 bestimmt werden. Die Rechnung wird hier nicht ausführlich durchgeführt, es soll ausreichen, die Ergebnisse anzugeben.

Man unterscheidet drei Fälle in Abhängigkeit des Verhältnisses von β^2 und ω_0^2:

Schwingfall: $\beta^2 < \omega_0^2$

In diesem Fall ist die Dämpfung relativ schwach, es kommt daher zu einer periodischen Bewegung, deren Amplitude allerdings (außer im idealisierten Fall $\beta = 0$) mit der Zeit immer mehr abnimmt. Die Bewegung soll hier trotzdem auch für $\beta > 0$ als „periodisch“ bezeichnet werden, weil in jeweils gleichen Zeitabständen Nulldurchgänge stattfinden.[2]
Die allgemeine Lösung für den Schwingfall lautet

$$\boxed{\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left(A_1 \cos\omega_\mathrm{g} t + \frac{\beta A_1 + A_2}{\omega_\mathrm{g}} \sin\omega_\mathrm{g} t\right) \quad .} \tag{2.14.13}$$

Die Bewegung ist periodisch mit der Kreisfrequenz ω_g. Außerdem sieht man an der Lösung, dass die Einhüllende der Amplitudenkurve eine Exponentialfunktion ($\mathrm{e}^{-\beta t}$) ist. Die Amplitude geht also *asymptotisch* gegen Null. Das Pendel bleibt also genau genommen nie ganz still stehen, sondern schwingt nur immer weniger und weniger.

Aperiodischer Grenzfall: $\beta^2 = \omega_0^2$

Vergrößert man die Dämpfung, so erreicht man für $\beta^2 = \omega_0^2$ schließlich den sog. „aperiodischen Grenzfall“. Er liegt genau zwischen dem Schwing- und dem Kriechfall und gehört zu der kleinsten Dämpfung, bei der gerade keine periodische Bewegung mehr stattfindet (d. h. keine Nullstellen in gleichen Zeitabständen auftreten). Die allgemeine Lösung hierfür lautet

[2] Diesbezüglich finden sich in der Literatur unterschiedliche Sprechweisen. Manche Autoren bezeichnen eine Bewegung *nur* dann als periodisch, wenn sie sich *identisch* wiederholt, also ihre Amplitude konstant bleibt.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\Big(A_1 + (A_2 + \beta A_1)\, t\Big) \tag{2.14.14}$$

Häufig werden die Anfangsbedingungen so gewählt, dass der Schwinger zur Zeit $t = 0$ mit einem gewissen Anfangswinkel losgelassen wird (d. h. $A_1 > 0, A_2 = 0$). Man erhält dann eine überall positive Funktion (ohne Nullstellen!):

$$\varphi(t) = A_1 \cdot \mathrm{e}^{-\beta t}\Big(1 + \beta\, t\Big) \quad . \tag{2.14.15}$$

Gibt man dem Schwinger hingegen aus der Ruhelage heraus einen „Schubs“ ($A_1 = 0$, $A_2 > 0$), so erhält man die Lösung

$$\varphi(t) = A_2 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-\beta t} \quad . \tag{2.14.16}$$

Möglich ist allerdings auch der Fall ($A_1 > 0, A_2 < -\beta A_1$), dabei ergibt sich *maximal eine* Nullstelle (ein „Unterschwinger“). In der Literatur findet man meist die erste Situation („Loslassen“) beschrieben, allerdings leider manchmal in Verbindung mit der zum dritten Fall gehörenden Zeichnung.
Der aperiodische Grenzfall hat große technische Bedeutung, denn er beschreibt den Fall, in dem eine Anfangsamplitude schnellstmöglich auf Null zurückgeht, ohne dass es zu Schwingungen kommt. Dies ist z. B. von Interesse bei allen Arten von Zeigerinstrumenten und bei der Abstimmung der Stoßdämpfer und Federn in Fahrzeugen.

Kriechfall: $\beta^2 > \omega_0^2$

Beim Kriechfall ist die Dämpfung so stark, dass es nicht mehr zu periodischen Bewegungen kommt, sondern der Schwinger „zur Ruhelage zurückkriecht“.[3]
Die allgemeine Lösung für den Kriechfall lautet

$$\varphi(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\beta t}\left(\frac{(\Gamma + \beta)A_1 + A_2}{2\Gamma} \cdot \mathrm{e}^{\Gamma t} + \frac{(\Gamma - \beta)A_1 - A_2}{2\Gamma} \cdot \mathrm{e}^{-\Gamma t}\right) \quad . \tag{2.14.17}$$

Erzwungene Schwingungen

Wirkt auf den Schwinger ein periodisch veränderliches Drehmoment der Form $M \cdot \cos\omega t$, so wird aus der oben betrachteten homogenen Differentialgleichung (2.14.5) eine inhomogene Differentialgleichung:

$$\Theta\, \ddot{\varphi}(t) + \widetilde{k}\dot{\varphi}(t) + \widetilde{D}_{\mathrm{dyn}}\varphi(t) = M \cdot \cos\omega t \tag{2.14.18}$$

[3] Auch hier ist maximal ein Nulldurchgang möglich, wenn einerseits A_1 und A_2 unterschiedliches Vorzeichen haben und andererseits der Betrag von A_2 groß genug ist.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

mit

$$\begin{aligned} M &= \text{Amplitude des äußeren Drehmomentes,} \\ \omega &= \text{Kreisfrequenz des äußeren Drehmomentes,} \end{aligned}$$

oder wieder in etwas anderer Schreibweise unter Verwendung der oben definierten Abkürzungen (siehe Gleichungen (2.14.7) und (2.14.8)):

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\,\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\,\varphi(t) = \frac{M}{\Theta} \cdot \cos\omega t \quad . \tag{2.14.19}$$

Die Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung erhält man als Summe aus der Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (siehe oben) und einer sog. partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Da wir die Lösungen der homogenen Gleichung schon kennen, müssen wir nur noch eine partikuläre Lösung $\varphi_{\text{part}}(t)$ finden. Wir nehmen dazu an, dass es eine Lösung gibt, bei der die Schwungscheibe genau mit der von außen aufgeprägten Kreisfrequenz schwingt. Als Ansatz können wir dann schreiben

$$\varphi_{\text{part}}(t) = C \cdot \cos(\omega t - \alpha) \tag{2.14.20}$$

wobei C eine reelle Amplitude darstellt und α eine konstante Phasendifferenz sein soll, um die die erzwungene Schwingung gegenüber der Anregung verzögert ist („hinterherhinkt“). Durch Ableiten und Einsetzen in (2.14.19) können C und α bestimmt werden. Man erhält[4]

$$C = \frac{M}{\Theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\beta\omega)^2}} \tag{2.14.21}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad . \tag{2.14.22}$$

Die partikuläre Lösung lautet somit

[4]Ein kleiner mathematischer Exkurs anhand von [Wei16, Wik16a, Wik16b]: Die Arkustangensfunktion als Umkehrfunktion des Tangens verdient hier eine etwas nähere Betrachtung. Schon bei der Schreibweise sind diverse Varianten in der Literatur zu finden, so z. B. arctan, atan, Arctan, Atan, $\tan^{(-1)}$ und $\tan^{-1}$. Manchmal werden die unterschiedlichen Schreibweisen auch verwendet, um z. B. zwischen der mehrdeutigen Umkehrfunktion und ihrem Hauptwert zu unterscheiden. Leider ist die Verwendung der Schreibweisen nicht vereinheitlicht, so dass die Notation verschiedener Autoren manchmal auch Widersprüche ergibt. Im vorliegenden Fall soll der Arkustangens einen Definitionsbereich von $[-\infty,+\infty]$ und einen Wertebereich von $]0,+\pi[$ haben. In vielen Programmiersprachen ist eine Funktion implementiert, die unter Verwendung von zwei Parametern sogar einen Wertebereich von $]-\pi,+\pi]$ ermöglicht und deshalb zur Kurvenanpassung im vorliegenden Fall besonders gut geeignet ist. Unter `FORTRAN`, `GNU C`, `Origin`, `SciDAVis` und `LabPlot` heißt diese Funktion atan2(y,x) und liefert den Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Linie vom Ursprung zum Punkt (x,y), also den Arkustangens von $\frac{y}{x}$ unter Berücksichtigung des Quadranten, in dem der Punkt (x,y) liegt. Bei `WolframAlpha` ist diese Funktion als ArcTan(x,y) definiert (Achtung: vertauschte Parameter!), die Eingabe atan2(y,x) wird aber erfreulicherweise auch korrekt umgesetzt (getestet am 06.10.2016). `Microsoft Excel`, `OpenOffice Calc` und `LibreOffice Calc` verwenden alle die Notation ARCTAN2(x; y) (getestet am 01.02.2019).

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

$$\varphi_{\text{part}}(t) = \underbrace{\frac{M}{\Theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\beta\omega)^2}}}_{\text{Amplitude}} \cdot \cos\left(\omega t \underbrace{- \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}_{\text{Phasenverschiebung}}\right) \quad . \tag{2.14.23}$$

Interessant ist die Frage, bei welcher Kreisfrequenz die Amplitude der erzwungenen Schwingung maximal wird. Es lässt sich leicht zeigen, dass C maximal wird für die Resonanzkreisfrequenz $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Es gilt also $\omega_{\text{res}} < \omega_{\text{g}} < \omega_0$, d. h. die Amplitudenresonanz tritt bei einer Kreisfrequenz *unterhalb* der Eigenkreisfrequenz ω_0 und sogar noch unterhalb der Kreisfrequenz ω_{g} der freien gedämpften Schwingung auf.

Die Wirbelstrombremse

Beim Torsionsoszillator kann die Dämpfung der Schwingung durch eine sog. Wirbelstrombremse realisiert werden. Diese besteht aus Permanentmagneten, deren Felder die Schwungscheibe aus Kupfer durchsetzen. Bewegt sich die Scheibe durch das Magnetfeld, so wird dem faradayschen Induktionsgesetz entsprechend eine Spannung im Kupfer induziert, die zu ringförmig geschlossenen Strömen („Wirbelströmen“) führt. Diese Ströme erzeugen ein Magnetfeld, das mit dem Magnetfeld der Permanentmagnete wechselwirkt und zwar entsprechend der lenzschen Regel in einer Weise, die die Bewegung des Schwingers bremst. Gleichzeitig entsteht am ohmschen Widerstand des Kupfers Wärme, so dass die Bewegungsenergie des Schwingers nach und nach in Wärmeenergie umgewandelt wird. Die Wirbelströme werden umso stärker, je schneller sich der Schwinger bewegt. Die bremsende Kraft (Reibungskraft) hängt dabei linear von der Winkelgeschwindigkeit ab.

Das Oszilloskop

Ein Oszilloskop ist ein elektronisches Messgerät, welches Spannungen in Abhängigkeit der Zeit darstellt. Für diesen Versuch eignet sich ein Oszilloskop deshalb sehr gut, weil Schwingungsvorgänge grafisch veranschaulicht werden können. In diesem Abschnitt sollen grundlegende Funktionen und speziell die Bedienung des `Rigol DS1022C` und des `Rigol DS1052E` für diesen Versuch erklärt werden.
Diese Oszilloskope können bis zu zwei Eingangssignale (Spannungen) gleichzeitig darstellen. Diese Signale werden über die Kanäle `CH1` und `CH2` angeschlossen. Mit Hilfe der Drehknöpfe `Position` und `Scale` im Funktionsbereich `Vertical` bzw. `Horizontal` können die angezeigten Signale in ihrer Position und Skalierung verändert werden. Die Skalierung wird am unteren Bildschirmrand gezeigt.
Die Signale können unabhängig voneinander angezeigt werden. Über die Tasten `CH1` bzw. `CH2` werden sie (de)aktiviert. Jeder Kanal hat ein Menü, das durch einen Druck auf die Taste `Menu on/off` ein- und ausgeblendet werden kann. Die Menüführung erfolgt dann entweder mit den grau-blauen Tasten am Bildschirmrand oder mit dem Drehknopf ↻. Eine Auswahl wird durch Drücken des Drehknopfes übernommen.

Zur genaueren Information über die Tastenfunktionen reicht es aus, die jeweilige Taste oder den jeweiligen Drehknopf einige Sekunden zu drücken. Es wird dann ein Hilfetext eingeblendet.

Bedienung für diesen Versuch

Ab Versuchsteil 2 wird das Oszilloskop benötigt. Sollte die Darstellung nicht auf Deutsch sein, können Sie dies über `Utility` — `Language` ändern. Es ist wichtig, dass zunächst eine Reihe von Einstellungen vorgenommen werden:

- Schalten Sie in den Menüs der beiden Kanäle die Kopplung auf DC:

  `CH1` bzw. `CH2`

  `Menu`

  `Kopplung` — `DC`

- Stellen Sie im Funktionsbereich `Horizontal` die Zeitbasis auf `Y-T`:

  `Horizontal` - `Menu`

  `Zeitbasis` — `Y-T`

- Verändern Sie die horizontale Position so weit, bis das orange T (Trigger) ganz am linken Rand ist. Dies ist wichtig, damit die Anzeige möglichst in Echtzeit aktualisiert wird:

  `Horizontal` - `Position` - ↺

Das `Cursor-` bzw. das `Measure`-Menü bietet die Möglichkeit einer Bestimmung von Phasenverschiebungen, bzw. einer automatischen Bestimmung von Periodendauern und Amplituden.
Amplituden und Phasenverschiebungen manuell bestimmen:

- `Cursor`

  `Modus` — `Spur`

  `CursorA` — `CH1` (`CH2` bei letztem Versuchsteil)

  `CursorB` — kein (bzw. `CH1` beim letzten Versuchsteil)

  Positionieren der `Cursor A` und `B` über den Drehknopf links vom `Cursor`-Menü.

Automatisch die Periodendauer (`Prd`) und die Extremwerte der Spannung (V_{min} und/oder V_{max}) anzeigen lassen:

- `Measure`

  `Quelle` — `CH1`

  `Zeit` — `Prd` (Auswahl bestätigen durch Druck auf ↺.)

  `Spannung` — V_{min} und/oder V_{max} (Auswahl bestätigen durch Druck auf ↺.)

Versuchsdurchführung

Beachten Sie während der gesamten Versuchszeit, dass

1. die Schwungscheibe zu keinem Zeitpunkt mehr als 1.5 rad aus der Ruhelage ausgelenkt werden darf, weil dadurch die Torsionsfeder beschädigt werden kann und es außerdem zu einem nichtlinearen Verhalten zwischen Auslenkung und Torsionsmoment kommt.

2. Ihr Versuchsaufbau nicht direkt parallel zum Nachbarversuch steht, da sonst Kopplungen über die Permanentmagnete auftreten können.

3. Sie bei allen Versuchsteilen – auch am zweiten Versuchstag – mit demselben Gerät arbeiten. Notieren Sie sich die Gerätenummer.

Hinweis `Zero-Adjust`: Die Permanentmagnete seitlich der Schwungscheibe, mit denen Wirbelströme induziert werden können, wechselwirken mit dem Permanentmagneten auf der Welle. Dadurch kann es vorkommen, dass der Torsionsoszillator über die seitlichen Permanentmagnete statisch ausgelenkt wird und die Ruhelage verfälscht wird. Außerdem driftet[5] die Elektronik des Torsionsoszillators. Um dennoch gute Ergebnisse zu erhalten, gehen Sie wie folgt vor:

Korrekte Einstellung der Permanentmagnete:

- Notieren Sie sich die Ruhelage beim ersten Versuchsteil mit ganz heraus geschraubten Permanentmagneten so genau wie möglich.

- Jedes Mal, wenn Sie die Position der Permanentmagnete zur Dämpfung verändern, achten Sie darauf, dass die Ruhelage immer noch gleich wie im ersten Versuchsteil ohne Dämpfung ist.

  Sollte dies nicht der Fall sein, ändern Sie die Position eines/der Permanentmagnete/n. Es kann sein, dass nicht beide Magnete die Schwungscheibe gleich weit überdecken.

Korrektur des Drifts der Elektronik:

- Warten Sie (mit korrekt eingestellten Permanentmagneten), bis die Schwungscheibe Ihre Ruhelage erreicht hat.

- Stellen Sie am Oszilloskop die vertikale Auflösung auf 2 mV–5 mV. Die Auflösung hängt davon ab, wie hoch das elektronische Rauschen Ihres Geräts ist.

- Regeln Sie mit dem `Zero-Adjust` Drehknopf am Torsionsoszillator die Spannung so lange nach, bis diese symmetrisch um 0 V schwankt. Damit kompensieren Sie den Drift der Elektronik.

- Kontrollieren Sie, insbesondere während des letzten Versuchsteils, den elektronischen Drift immer wieder und korrigieren Sie ihn bei Bedarf.

[5] Unter „Drift“ versteht man die durch nicht näher angegebene Einflüsse verursachte langsame zeitliche Veränderung eines Signals.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Teil 1: statische Bestimmung der Torsionskonstanten

1. Entfernen Sie eventuelle Hohlzylinderviertel aus Messing, die auf der Schwungscheibe aufgesteckt sein können.

2. Schrauben Sie die seitlichen Permanentmagnete vollständig nach außen.

3. Bestimmen und notieren Sie auf der Messskala die Ruhelage der Schwungscheibe. Lassen Sie sich dazu das parallaxenfreie Ablesen erklären. Die Angabe auf der Scheibe ist in der Einheit Radiant.

4. Positionieren Sie die Umlenkrollen auf den Pins an den Seiten des Oszillators und befestigen Sie die Angelschnur am Torsionskolben nach Abbildung 2.14.2. Führen Sie diese so über die Umlenkrollen, dass Gewichte angehängt werden können. Achten Sie darauf, dass die Schnur immer tangential anliegt.

5. Fertigen Sie eine Tabelle mit der Auslenkung in Abhängigkeit von der angehängten Gesamtmasse $2m$ an:
   - Wiegen Sie die beiden Halter und notieren Sie sich deren Massen und Unsicherheit der Massen.
   - Bringen Sie an jeder Seite des Torsionsoszillators einen Halter an der Angelschnur an.
   - Bestimmen und notieren Sie nun die Auslenkung aus der Ruhelage.
   - Erhöhen Sie die angehängte Masse in Schritten von 100 g (d. h. Schritte mit 50 g auf jeder Seite), bis zu einer Gesamtmasse von maximal 300 g auf jeder Seite.

Teil 2: dynamische Bestimmung der Torsionskonstanten

6. Entfernen Sie nun den Aufbau zur statischen Bestimmung der Torsionskonstanten (Schnur, Gewichte, Umlenkrollen).

7. Verbinden Sie den `Angular Position` Ausgang mit Kanal 1 des Ozilloskops.

8. Schalten Sie das Oszilloskop und die Stromversorgung des Torsionsoszillators ein.

9. Beachten Sie den Hinweis `Zero-Adjust`, Drift der Elektronik.

10. Erzeugen Sie eine freie ungedämpfte Schwingung.

11. Zeichnen Sie 3–4 Perioden auf dem Oszilloskop auf und bestimmen Sie aus den Bildern jeweils die Periodendauer T_0 wie folgt: Verwenden Sie die `Measure`-Funktion (`Measure`: `Quelle` → `CH1`; `Zeit` → `Prd`). Beobachten Sie das Oszilloskop, welches die Periodendauer nach jedem abgeschlossenen Messzyklus aktualisiert. Notieren Sie sich eine mittlere Periodendauer (welche Periodendauer wird am häufigsten angezeigt?) und eine zugehörige Unsicherheit.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

12. Benutzen Sie im Folgenden entweder die Hohlzylinderviertel aus Messing oder die Stahlkugeln als Zusatzgewichte. Fertigen Sie eine Tabelle an, in der Sie die Periodendauer T_0 in Abhängigkeit von der Masse der zusätzlichen Gewichte notieren. Verfahren Sie dazu für jedes der acht Zusatzgewichte wie folgt:
    - Wiegen Sie das Zusatzgewicht und notieren Sie sich dessen Masse sowie deren Unsicherheit.
    - Stecken/legen Sie das Zusatzgewicht (ggf. zu den bereits vorhandenen Zusatzgewichten) auf die Schwungscheibe.
    - Bestimmen Sie die Periodendauer T_0 und deren Unsicherheit wie oben beschrieben mit der `Measure`-Funktion.
13. Haben Sie die Hohlzylinderviertel benutzt, dann bestimmen Sie nun noch den Außen- und Innendurchmesser des Hohlzylinders, der sich aus vier zusammengesetzten Hohlzylinderviertel ergibt. Vergessen Sie nicht, die Unsicherheiten zu notieren. Sollten Sie die Stahlkugeln verwendet haben, bestimmen Sie den Durchmesser der Kugeln und den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Drehachse; letzterem am besten als halben Abstand zweier gegenüberliegender Kugelmittelpunkte. Hierzu steht Ihnen ein Messschieber zur Verfügung. Vergessen Sie auch hier nicht, die Unsicherheiten zu notieren.

Teil 3: freie Schwingung

14. Entfernen Sie die Hohlzylinderviertel aus Messing oder die Stahlkugeln.
15. Beachten Sie den Hinweis `Zero-Adjust`, Drift der Elektronik.
16. Erzeugen Sie eine freie ungedämpfte Schwingung. (Die Periodendauer ist Ihnen aus dem letzten Versuchsteil bekannt.)
17. Frieren Sie 4–6 Perioden auf dem Oszilloskop mit der `RUN/STOP`-Taste ein.
18. Bestimmen und notieren Sie sich den Wert der Spannung mehrerer aufeinander folgender Maxima, bzw. Minima und deren Unsicherheiten. Verwenden Sie dazu den `Cursor`:

    `Cursor`: `Modus` → `Spur`; `CursorA` → `CH1`; `CursorB` → `kein`. Anzeige `A→Y` = ... mV.
19. Tragen Sie den Betrag der Maxima und Minima in das halblogarithmische Diagramm ein, das Ihnen Ihr/e Tutor/in zur Verfügung stellt.

Teil 4: gedämpfte Schwingungen

20. Dämpfen Sie den Torsionsoszillator leicht, indem Sie die seitlichen Permanentmagnete mit den Verstellschrauben nahe an den Rand der Schwungscheibe bringen. Schwungscheibe und Permanentmagnete sollten nicht oder nur minimal überlappen ($< 1\,\mathrm{mm}$).

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

21. Beachten Sie jedes Mal, wenn Sie die Dämpfung ändern, den Hinweis `Zero-Adjust`.

22. Bestimmen Sie die Periodendauer T_0 und deren Unsicherheit. Hier funktioniert die `Measure`-Funktion nicht zuverlässig, da es sich streng genommen nicht um ein periodisches Signal handelt. Verwenden Sie daher den `Cursor` wie in Punkt 18, allerdings dieses Mal die Anzeige `A→X` = ... s.

23. Bestimmen und notieren Sie sich den Wert der Spannung mehrerer aufeinander folgender Maxima, bzw. Minima und deren Unsicherheiten. Verwenden Sie dazu ebenfalls den `Cursor` wie in Punkt 18.

24. Tragen Sie den Betrag der Maxima und Minima in das halblogarithmische Diagramm ein, das Sie bereits im letzten Versuchsteil begonnen haben.

25. Wiederholen Sie diesen Versuchsteil für zwei weitere Dämpfungen, die Sie durch weiteres Hereinschrauben der Permanentmagnete einstellen. Gut geeignet sind Überlappungen zwischen Permanentmagneten und Schwungscheibe von 1 mm–2 mm sowie 3 mm–4 mm. Die Dämpfung sollte nicht zu stark eingestellt sein, so dass noch mindestens drei Perioden der Schwingung deutlich erkennbar sind.

26. Beobachten und notieren Sie kurz, was für sehr starke Dämpfung geschieht.

Teil 5: erzwungene Schwingungen und Resonanzkurve

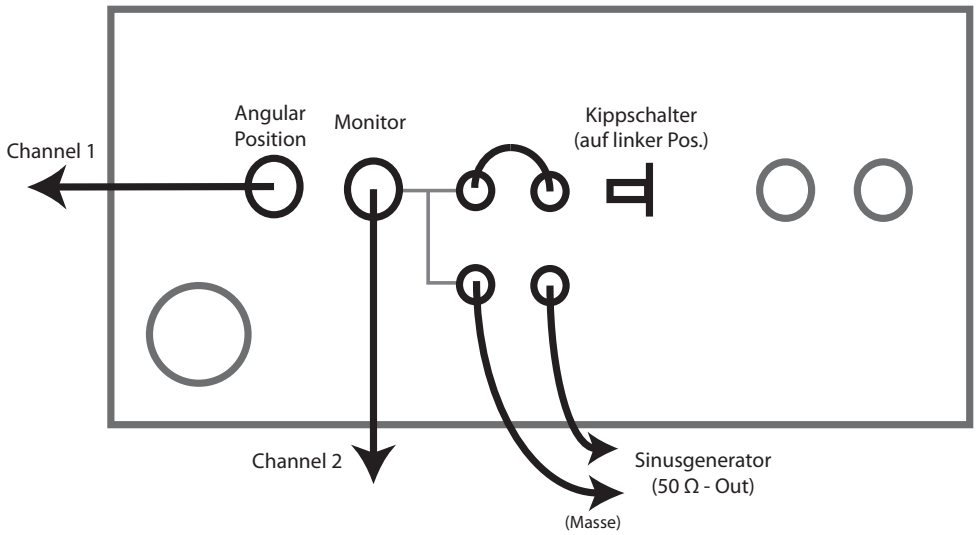

Abbildung 2.14.4.: Verschaltung mit dem Sinusgenerator.

27. Schalten Sie den Sinusgenerator über den Steckerschalter (roter Wippschalter) am Steckernetzteil aus, damit dieser vorerst keine Spannung liefert. (Der Sinusgenerator selbst hat keinen expliziten Anschaltknopf.)

28. Schließen Sie den Sinusgenerator nach Abbildung 2.14.4 an, indem Sie `Angular Position` mit `CH1` und das Spulenpaar mit dem Ausgang des Sinusgenerators verbinden. Schalten Sie ggf. den `Velocity Readout` Kippschalter auf die linke Position, um das System über das Spulenpaar treiben zu können.

29. Dämpfen Sie das System mit der Magnetvorrichtung, indem Sie die Permanentmagnete so positionieren, dass sie etwa 0 mm–1 mm über die Schwungscheibe ragen. Damit vermeiden Sie eine zu große Schwingungsamplitude („Resonanzkatastrophe“).

30. Beachten Sie den Hinweis `Zero-Adjust`.

31. Stellen Sie den Amplitudenregler am Sinusgenerator auf etwa 3 V ein (ganz links sind 0 V, ganz rechts 10 V; eine Anzeige gibt es nicht, Sie müssen den Wert also schätzen) und stecken Sie erst dann den Netzstecker des Sinusgenerators ein.

32. Stellen Sie die Erregerfrequenz f_E des Sinusgenerators auf die Eigenfrequenz f_0 des Torsionsoszillators ein, die Sie am letzten Versuchstag bestimmt haben.

33. Erhöhen oder erniedrigen Sie nun die Amplitude am Sinusgenerator, bis die Amplitude des Torsionsoszillators am Oszilloskop ein Maximum von etwa $U_\mathrm{max} \approx 1.5\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{V}$ hat. Eventuell müssen Sie an der Dämpfung etwas nachregeln.

34. Lesen Sie als Maß für die Amplitude des Sinusgenerators die Amplitude am `Monitor`-Ausgang (`CH2`) ab und notieren Sie sich diese. Behalten Sie nun diese Amplitude am Sinusgenerator für den kompletten restlichen Versuchsteil bei! Ändern Sie sie keinesfalls mehr. Sollten Sie versehentlich die Amplitude des Sinusgenerators verstellen, nutzen Sie Ihren Messwert der Amplitude des `Monitor`-Ausgangs, um die ursprüngliche Amplitude des Sinusgenerators erneut einzustellen.

35. Um aussagekräftige Resonanzkurven zu erhalten, ist es notwendig, verschiedene Bereiche der Resonanzkurve mit unterschiedlicher Schrittweite aufzunehmen. Da sich die Geräte unterschiedlich verhalten, achten Sie daher darauf, dass Sie die richtige Spalte der folgenden Tabelle verwenden.

Schrittweite in Hz	Geräte Nr. 1–7 f_E in Hz	Geräte Nr. 8–10 f_E in Hz
0.100	von 0.200 bis 0.700	von 0.200 bis 1.000
0.020	von 0.760 bis 0.960	von 1.020 bis 1.180
0.100	von 1.000 bis 1.500	von 1.200 bis 1.600
	1.750	1.750
0.500	von 2.000 bis 3.000	von 2.000 bis 3.000

Gehen Sie für jede Erregerfrequenz f_E wie folgt vor:

- Stellen Sie f_E am Sinusgenerator ein.
- Warten Sie den Einschwingvorgang ab.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

- Bestimmen Sie die Amplitude $U_{\max}$ des Torsionsoszillators mit Hilfe der `Measure`-Funktion:

  `Measure`: `Quelle` → `CH1`; `Spannung` → $\mathtt{V}_{\max}$, $\mathtt{V}_{\min}$.

  Lassen Sie sich sinnvollerweise auch $\mathtt{V}_{\min}$ anzeigen, damit Sie bei Bedarf mit dem `Zero-Adjust` so nachregeln können, dass $\mathtt{V}_{\max} \approx |\mathtt{V}_{\min}|$ gilt.

- Bestimmen Sie die Phasenverschiebung α zwischen Anregung und Torsionsoszillator mit dem `Cursor-Menu`:

  `Cursor`: `Modus` → `Spur`; `CursorA` → `CH2` (Anregung); `CursorB` → `CH1` (Torsionsoszillator). Beide Cursor auf den gleichen Symmetriepunkt der Sinuskurve (z. B. Nulldurchgang von negativ zu positiv) positionieren; angezeiten Wert für $|\Delta\mathtt{X}| = \ldots$ ms ablesen.

36. Wiederholen Sie Punkt 35 für eine weitere Dämpfung mit einem Überlapp von etwa 3 mm–4 mm bei gleicher (!) Amplitude am Sinusgenerator.

Auswertung Für die Auswertung werden zusätzliche Daten benötigt. Wählen Sie aus Tabelle 2.14.1 die für Ihr Modell zutreffenden Maße aus.

Tabelle 2.14.1.: Maße der Torsionsoszillatoren.

	Geräte Nr. 1–7 (dunkles Gehäuse)	Geräte Nr. 8–10 (helles Gehäuse)
Schwungscheibe		
äußerer Durchmesser $2R_{\mathrm{a}}$	12.580(20) cm	12.580(20) cm
innerer Durchmesser $2R_{\mathrm{i}}$	2.580(20) cm	2.540(20) cm
Masse m_{S}	954.0(20) g	1129.0(20) g
Welle		
äußerer Durchmesser $2r_{\mathrm{a}}$	2.540(10) cm	2.530(10) cm
innerer Durchmesser $2r_{\mathrm{i}}$	0.970(10) cm	0.960(10) cm
Masse m_{W}	398.0(20) g	415.0(20) g

Teil 1: statische Bestimmung der Torsionskonstanten

1. Berechnen Sie aus jeder notierten Auslenkung den jeweiligen Verdrillwinkel φ, für den in Ruhelage $\varphi = 0$ gilt.

2. Tragen Sie in einem Diagramm den Verdrillwinkel φ abhängig von der Gesamtmasse $2m$ der angehängten Gewichte auf.

3. Berechnen Sie als Ausgleichsgerade eine Ursprungsgerade und tragen Sie diese in das Diagramm ein.

Hinweis: Das theoretische Modell gibt Ihnen vor, dass ohne angehängte Gewichte ($2m = 0$) per Definition die Auslenkung $\varphi = 0$ sein muss. Um die Theorie richtig anzuwenden, setzen Sie folglich eine Ursprungsgerade an.

4. Bestimmen Sie aus der Steigung der Ausgleichsgeraden die Torsionskonstante $\widetilde{D}_{\text{stat}}$.

Teil 2: dynamische Bestimmung der Torsionskonstanten

5. Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ_0 des gesamten Rotationskörpers (Schwungscheibe + Welle).

6. Bilden Sie den Mittelwert Ihrer Messwerte für die Massen der Zusatzgewichte. Berechnen Sie daraus für die Hohlzylinderviertel oder die Stahlkugeln deren Trägheitsmoment $\Delta\Theta$ unter der Annahme, dass die Massen aller Hohlzylinderviertel, bzw. Stahlkugeln identisch sind.

7. Zeigen Sie unter Verwendung von Gleichung (2.14.8) und $\omega_{0,\text{n}} = 2\pi/T_{0,\text{n}}$ (wobei $T_{0,\text{n}}$ die Periodendauer des ungedämpften Systems mit n Zusatzgewichten ist), dass $(T_{0,\text{n}}/2\pi)^2$ linear von der Zahl n der Zusatzgewichte abhängt.
Tragen Sie dann $(T_{0,\text{n}}/2\pi)^2$ über n auf und berechnen Sie eine Ausgleichsgerade.

8. Bestimmen Sie aus der Steigung der Geraden mit Hilfe des errechneten $\Delta\Theta$ die Torsionskonstante $\widetilde{D}_{\text{dyn}}$. Berechnen Sie ferner aus $\widetilde{D}_{\text{dyn}}$ und dem y-Achsenabschnitt der Geraden Θ_0.

9. Vergleichen Sie $\widetilde{D}_{\text{dyn}}$ mit $\widetilde{D}_{\text{stat}}$. Was stellen Sie fest? Erklären Sie diese Abweichung.

10. Vergleichen Sie das aus der Ausgleichsgeraden berechnete Θ_0 mit dem von Ihnen berechneten. Was stellen Sie fest? Woher kommt der Unterschied, d. h. was müssten Sie berücksichtigen um einen genaueren Wert für Θ_0 bei der Berechnung zu erhalten?

Teil 3 und 4: freie und gedämpfte Schwingungen

11. Nehmen Sie Ihr Diagramm der freien und der gedämpften Schwingungen vom ersten Versuchstag her. Zeichnen Sie nach Augenmaß in das Diagramm für jede Dämpfung eine Ausgleichsgerade ein. Binden Sie dieses Diagramm als Bild in Ihren Bericht ein.[6] Achten Sie auf eine ordentliche Darstellung. Zeichnen Sie ggf. erneut.

12. Erklären Sie das lineare Verhalten in der halblogarithmischen Darstellung.

13. Bei welcher Ihrer Messungen war die Dämpfung am größten? Woran erkennen Sie dies?

14. Betrachten Sie die Periodendauern bei den verschiedenen Dämpfungen. Welches Verhalten erwarten Sie? Können Sie dieses Verhalten beobachten? Wenn nein, woran könnte das liegen?

[6] Die Drucker der Uni scannen kostenlos Seiten ein und verschicken Sie per eMail an den Inhaber der Kopierkarte.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Teil 5: erzwungene Schwingungen

15. Stellen Sie in einem gemeinsamen Diagramm für alle eingestellten Erregerfrequenzen die Amplituden dar.

16. Vergleichen Sie die beiden Resonanzfrequenzen untereinander und mit der zuvor ermittelten Eigenfrequenz. Welches Verhalten erwarten Sie? Können Sie dies mit den Messungen der Resonanzfrequenzen bestätigen? Wenn nein, woran könnte das liegen?

17. Tragen Sie die Phasenverschiebung der Schwingungen in einem gemeinsamen Diagramm über die Frequenz auf.

18. Was stellen Sie in Bezug auf die Phasenverschiebung für die Resonanzfrequenz fest und was bei niederfrequenter, bzw. hochfrequenter Anregung? Erklären Sie dieses Verhalten.

19. Vergleichen Sie die beiden Kurven der Phasenverschiebung. Welchen Unterschied erwarten Sie? Können Sie diesen Unterschied bestätigen? Wenn nein, woran könnte das liegen?

Ergänzende Informationen

Berechnung der Trägheitsmomente einiger einfacher geometrischer Körper

Die Berechnung von Trägheitsmomenten beruht immer auf der Ausführung des Volumenintegrals

$$\Theta = \int \varrho\, r^2 \,\mathrm{d}V \quad . \tag{2.14.24}$$

Je nach der Geometrie des Körpers kann dabei der eine oder andere Rechenweg vorteilhaft sein. Bei rotationssymmetrischen Körpern ist es meist am sinnvollsten, in Zylinderkoordinaten (z, φ, r) zu rechnen, da die Integration über φ dabei besonders einfach ist. Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten lässt sich schreiben als $\mathrm{d}V = \mathrm{d}z \cdot r\,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r$.
Unter den Voraussetzungen, dass die Dichte ϱ homogen ist und die Drehachse durch den Schwerpunkt S verläuft, können einige im Versuch relevante Trägheitsmomente z. B. folgendermaßen berechnet werden[7]:

1. **Scheibe mit polarer Drehachse** (senkrecht zur Scheibe)
   Für eine Kreisscheibe (bzw. einen Vollzylinder) mit Radius r_{Scheibe}, Höhe h und

[7] Weitere Beispiele und teilweise auch etwas andere Rechenwege finden Sie in vielen Lehrbüchern. Genannt seien insbesondere [Gob74] und [Tip00].

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

Masse m_{Scheibe} gilt bei einer senkrecht zur Grundfläche stehenden Achse (der sog. „Figurenachse“)

$$\Theta_{\text{Scheibe,polar}} = \int_0^{r_{\text{Scheibe}}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h \varrho\, r^2 \,\mathrm{d}z \right) r \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r \tag{2.14.25}$$

$$= 2\,\pi\,\varrho\,h \int_0^{r_{\text{Scheibe}}} r^3 \,\mathrm{d}r \tag{2.14.26}$$

$$= 2\,\pi\,\varrho\,h \left[\frac{1}{4}\, r^4 \right]_0^{r_{\text{Scheibe}}} \tag{2.14.27}$$

$$= 2\,\pi\,\varrho\,h\, \frac{r_{\text{Scheibe}}^4}{4} \tag{2.14.28}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\pi\,\varrho\,h\,r_{\text{Scheibe}}^2}_{m_{\text{Scheibe}}} \cdot r_{\text{Scheibe}}^2 \tag{2.14.29}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_{\text{Scheibe}} \cdot r_{\text{Scheibe}}^2 \quad . \tag{2.14.30}$$

2. **Scheibe mit äquatorialer Drehachse** (parallel zur Scheibe)
   Betrachtet man kartesische Koordinaten (x, y, z), legt das Koordinatensystem so, dass die xy-Ebene parallel zur Grundfläche der Scheibe ist und die z-Achse senkrecht darauf steht, und bezeichnet mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand eines Massenelements zur Drehachse, dann gilt

$$\Theta_{\text{Scheibe,polar}} = \int r^2 \,\mathrm{d}m = \int \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m$$
$$= \int x^2 \,\mathrm{d}m + \int y^2 \,\mathrm{d}m \quad . \tag{2.14.31}$$

   Aus Symmetriegründen müssen die beiden Summanden auf der rechten Seite von Gleichung (2.14.31) gleich sein.
   Folglich gilt für eine Kreisscheibe (bzw. ein Vollzylinder) mit Radius r, Höhe h und Masse m für eine parallel zur Grundfläche liegende Achse

$$\Theta_{\text{Scheibe,äquatorial}} = \frac{1}{2} \cdot \Theta_{\text{Scheibe,polar}} = \frac{1}{4} \cdot m_{\text{Scheibe}} \cdot r_{\text{Scheibe}}^2 \quad . \tag{2.14.32}$$

3. **Hohlzylinder**
   Für einen Hohlzylinder mit Innenradius r_{i}, Außenradius r_{a} und Höhe h gilt Gleichung (2.14.25) leicht abgeändert, nämlich mit anderen Integrationsgrenzen für r

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

(die Rotation soll wieder um die Figurenachse, also „polar“ erfolgen). Man erhält so analog zur Rechnung bei der Scheibe

$$\Theta_{\text{Hohlzylinder}} = \int_{r_\text{i}}^{r_\text{a}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h \varrho\, r^2 \,\mathrm{d}z \right) r \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r \tag{2.14.33}$$

$$= 2\,\pi\,\varrho\,h \int_{r_\text{i}}^{r_\text{a}} r^3 \,\mathrm{d}r \tag{2.14.34}$$

$$= 2\,\pi\,\varrho\,h \left[\frac{1}{4}\, r^4 \right]_{r_\text{i}}^{r_\text{a}} \tag{2.14.35}$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\,h \cdot \underbrace{\left(r_\text{a}^4 - r_\text{i}^4\right)}_{\left(r_\text{a}^2 - r_\text{i}^2\right)\cdot\left(r_\text{a}^2 + r_\text{i}^2\right)} \tag{2.14.36}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\pi\,\varrho\,h\,\left(r_\text{a}^2 - r_\text{i}^2\right)}_{m_\text{Hohlzylinder}} \cdot \left(r_\text{a}^2 + r_\text{i}^2\right) \tag{2.14.37}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_\text{Hohlzylinder} \cdot \left(r_\text{i}^2 + r_\text{a}^2\right) \quad . \tag{2.14.38}$$

4. **Kugel**

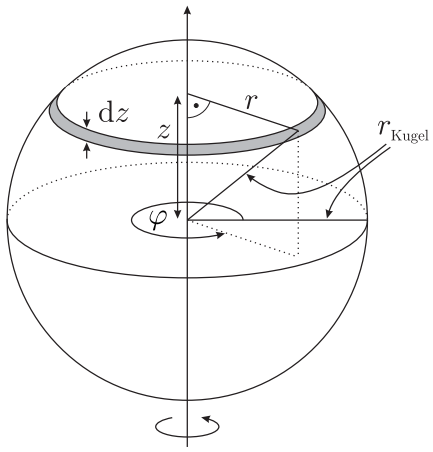

Abbildung 2.14.5.: Skizze zur Berechnung des Trägheitsmomentes einer Kugel.

Wir rechnen wieder in Zylinderkoordinaten[8]. Der erste Schritt ist die Bestimmung der Integrationsgrenzen für z, φ und r. Legt man die Grenzen für z auf

[8]Zwar ist die Beschreibung der *Form* der Kugel in Kugelkoordinaten einfacher, aber wir interessieren uns ja für das *Trägheitsmoment*, und dafür sind die Zylinderkoordinaten bequemer — in Kugelkoordinaten müsste man nämlich das Integral $\int \sin\vartheta \cos^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$ lösen.

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC

$z = -r_{\text{Kugel}}$ bis $z = +r_{\text{Kugel}}$ und für φ auf $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\,\pi$, so hängen die Grenzen für r davon ab, bei welchem Wert von z man sich befindet (bei konstanten Grenzen würde man ja keine Kugel, sondern einen Hohl- bzw. Vollzylinder erhalten). Aus Abbildung 2.14.5 liest man ab, dass gilt $0 \leq r \leq \sqrt{r_{\text{Kugel}}^2 - z^2}$. Man erhält also

$$\Theta_{\text{Kugel}} = \int\limits_{-r_{\text{Kugel}}}^{+r_{\text{Kugel}}} \underbrace{\int\limits_{0}^{\sqrt{r_{\text{Kugel}}^2 - z^2}} \underbrace{\int\limits_{0}^{2\,\pi} \varrho\, r^2 \cdot r\, \mathrm{d}\varphi}_{2\,\pi\,\varrho\, r^3}}_{\frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\left(r_{\text{Kugel}}^2 - z^2\right)^2} \mathrm{d}r\ \mathrm{d}z \tag{2.14.39}$$

$$= \int\limits_{-r_{\text{Kugel}}}^{+r_{\text{Kugel}}} \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\left(r_{\text{Kugel}}^2 - z^2\right)^2 \mathrm{d}z \tag{2.14.40}$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho \int\limits_{-r_{\text{Kugel}}}^{+r_{\text{Kugel}}} \left(r_{\text{Kugel}}^4 - 2\,r_{\text{Kugel}}^2\,z^2 + z^4\right) \mathrm{d}z \tag{2.14.41}$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho \left[r_{\text{Kugel}}^4\,z - \frac{2}{3}\,r_{\text{Kugel}}^2\,z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{-r_{\text{Kugel}}}^{+r_{\text{Kugel}}} \tag{2.14.42}$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho \left[2 \cdot \left(r_{\text{Kugel}}^5 - \frac{2}{3}\,r_{\text{Kugel}}^5 + \frac{1}{5}\,r_{\text{Kugel}}^5\right)\right] \tag{2.14.43}$$

$$= \pi\,\varrho \cdot r_{\text{Kugel}}^5 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)}_{\frac{15-10+3}{5\cdot 3} = \frac{8}{5\cdot 3} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}} \tag{2.14.44}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{4}{3}\,\pi\,r_{\text{Kugel}}^3}_{V_{\text{Kugel}}}}_{m_{\text{Kugel}}} \cdot \varrho \cdot r_{\text{Kugel}}^2 \tag{2.14.45}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot m_{\text{Kugel}} \cdot r_{\text{Kugel}}^2 \quad . \tag{2.14.46}$$

Alternativ kann man Gleichung (2.14.40) auch etwas anschaulicher begründen: Wir „zerlegen“ dazu die Kugel nach Abbildung 2.14.5 in zur Drehachse senkrechte Scheiben mit Dicke $\mathrm{d}z$ und jeweiligem Radius r, wobei $r^2 = \left(r_{\text{Kugel}}^2 - z^2\right)$. Dann hat eine solche Scheibe nach Gleichung (2.14.30) das polare Trägheitsmoment

$$\mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2}\,\underbrace{\varrho\,\underbrace{\pi\,r^2\,\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}V}}_{\mathrm{d}m} \cdot r^2 = \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\,\left(r^2\right)^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\,\left(r_{\text{Kugel}}^2 - z^2\right)^2\,\mathrm{d}z \quad . \tag{2.14.47}$$

Die Kugel erstreckt sich von $z = -r_{\text{Kugel}}$ bis $z = +r_{\text{Kugel}}$, daher gilt Gleichung (2.14.40).

5. **Stab**

Ein hinreichend dünner Stab (das ist der Normalfall, sonst würde man ihn besser

als „Vollzylinder“ bezeichnen) der Länge l, der sich um eine zu ihm senkrechte Achse durch seinen Mittelpunkt dreht, kann als eindimensional betrachtet werden. Man legt die x-Achse in Stabrichtung, bezeichnet die Querschnittsfläche mit q und betrachtet zur Integration Massenelemente $\mathrm{d}m = \varrho\, q\, \mathrm{d}x$. Dann gilt

$$\Theta_{\text{Stab}} = \int\limits_{-l/2}^{+l/2} \varrho\, q\, x^2 \mathrm{d}x \tag{2.14.48}$$

$$= \varrho\, q \cdot \left[\frac{1}{3}\, x^3\right]_{-l/2}^{+l/2} \tag{2.14.49}$$

$$= \varrho\, q \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3}\, \frac{l^3}{8}\right] \tag{2.14.50}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \underbrace{\varrho\, q\, l}_{m_{\text{Stab}}} \cdot l^2 \tag{2.14.51}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot m_{\text{Stab}} \cdot l^2 \tag{2.14.52}$$

Literaturhinweise

Das Thema harmonische Schwingungen wird in allen einschlägigen Physik-Lehrbüchern behandelt, so z. B. in [Mes04] oder [DHSF98].

Literaturverzeichnis

[DHSF98] Dorfmüller, Thomas, Wilhelm T. Hering, Klaus Stierstadt und Günther Fischer: *Bergmann-Schaefer – Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band I: Mechanik, Relativität, Wärme. Walter de Gruyter, Berlin, 11. Auflage, 1998.

[Gob74] Gobrecht, Heinrich: *Bergmann-Schaefer – Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band I: Mechanik, Akustik, Wärme. Walter de Gruyter, Berlin, 9. Auflage, 1974.

[Mes04] Meschede, Dieter: *Gerthsen - Physik*. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 22. Auflage, 2004.

[Tip00] Tipler, Paul A.: *Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg · Berlin, 2000. (amerikanische Originalausgabe 1976, 1982, 1991; deutsche Übersetzung 1994, 1995, 1998, 2000).

[Wei16] Weisstein, Eric W.: *„inverse tangent.“ from mathworld–a wolfram web resource.*, 2016. `http://mathworld.wolfram.com/InverseTangent.html`.

[Wik16a] Wikipedia: *Arkustangens und arkuskotangens — wikipedia, die freie enzyklopädie*, 2016. [Online; Stand 6. Oktober 2016].

[Wik16b] WIKIPEDIA: *Atan2 — wikipedia, the free encyclopedia*, 2016. [Online; accessed 6-October-2016].

© Bernd-Uwe Runge, Physikalisches Anfängerpraktikum der Universität Konstanz — zum internen Gebrauch bestimmt
Diese Anleitung ersetzt NICHT den Grundlagenteil Ihres Praktikumsberichtes! Haben Sie Verbesserungsvorschläge?
last change to this section: Revision: 1613 , Date: 2022-10-24 14:13:06 +0200 (Mo, 24 Okt 2022)
Gesamtversion: kompiliert am 6. Dezember 2024 um 9:42 Uhr UTC