

## 5.4 Schwingungssiebe @home

### Hard- und Software-Voraussetzungen:

- Computer (Windows/macOS, evtl. auch Linux)
- LTspice XVII
  - Das Programm kann kostenlos und ohne Registrierung von der angegebenen Homepage heruntergeladen und genutzt werden.
  - Simulationssoftware für Windows und macOS<sup>21</sup>, läuft möglicherweise mit Wine auch unter Linux (angeblich vom Programmierer selbst getestet)
  - für das AP-2@home getestet: Version vom 30.04.2020<sup>22</sup>
  - Homepage  
<https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators.html>
    - \* Schnellübersicht über **Tastaturbelegungen (Windows)** und **Abkürzungen (alle Betriebssysteme)**:  
[https://www.analog.com/media/en/simulation-models/spice-models/LTspice\\_ShortcutFlyer.pdf](https://www.analog.com/media/en/simulation-models/spice-models/LTspice_ShortcutFlyer.pdf)
    - \* Schnellübersicht über **Tastaturbelegungen (macOS)**:  
<https://www.analog.com/media/en/simulation-models/spice-models/LTspiceShortcutsForMacOSX.pdf>
    - \* **Getting Started Guide**:  
<https://www.analog.com/media/en/simulation-models/spice-models/LTspiceGettingStartedGuide.pdf>
    - \* „Kurzeinführung“ in LTspice:  
<https://www.analog.com/en/analog-dialogue/articles/get-up-and-running-with-ltspice.html>
  - allgemeine Beschreibung  
<https://de.wikipedia.org/wiki/LTspice> bzw.  
<https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=LTspice&oldid=188360720>
  - **Download**  
<https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html>
  - Tutorials usw.  
[http://www.gunthard-kraus.de/LTSwitcherCAD/index\\_LTSwitcherCAD.html](http://www.gunthard-kraus.de/LTSwitcherCAD/index_LTSwitcherCAD.html)  
 insbesondere **ausführliches Tutorial** von Gunthard Kraus für LTspice XVII (Version vom 18.02.2020)  
[http://www.gunthard-kraus.de/LTSwitcherCAD/LTSpice%20XVII\\_Tutorial\\_korr.pdf](http://www.gunthard-kraus.de/LTSwitcherCAD/LTSpice%20XVII_Tutorial_korr.pdf)
  - viele (weitere) Demoschaltungen  
<https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/>

<sup>21</sup>Die Bedienoberfläche unter macOS ist leider weniger intuitiv als unter Windows, die Funktionen sind etwas versteckt. Im Prinzip gibt es auch die Möglichkeit, die Windows-Version von LTspice mit Hilfe von Wine unter macOS laufen zu lassen. Die Installation ist aber nicht trivial und wird daher im Moment nur erfahrenen Mac-Usern empfohlen.

<sup>22</sup>30.04.2020 14:06:04 PST lt. Angabe im Programm selbst, bzw. 01.05.2020 lt. Angabe auf der Downloadseite. Neuere Versionen sollten auch funktionieren.

Es wurden Probleme beobachtet mit älteren Installationen, bei denen über das Programm ein Update ausgeführt wurde. Diese Probleme ließen sich lösen durch die vollständige Deinstallation und anschließende Neuinstallation einer neuen Version.

- ltspice-simulator/lt-spice-demo-circuits.html
- spezielle Hinweise für LTspice unter macOS:
- <https://www.woolseyworkshop.com/2019/10/04/getting-started-with-ltspice-for-mac/>

## Ziel

In diesem Versuch werden Sie verschiedene Kombinationen aus Kondensatoren, Spulen und Widerständen im Rahmen einer Simulation auf ihre Wechselstromeigenschaften hin untersuchen.

Dabei sollen Sie insbesondere lernen, wie man mit Hilfe geeigneter Schaltungen bestimmte Frequenzanteile aus einem beliebigen Wechselstromsignal „auswählen“ kann.

## Hinweise zur Vorbereitung

Die Antworten auf diese Fragen sollten Sie vor der Versuchsdurchführung wissen. Sie sind die Grundlage für das Gespräch mit Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor vor dem Versuch.

- Wie unterscheiden sich Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand?
- Wovon hängt der Blindwiderstand eines Kondensators, bzw. einer Spule ab?
- Erläutern Sie die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung bei sinusförmigem Wechselstrom an Reihenschaltungen aus Ohm'schem Widerstand  $R$ , Kondensator mit Kapazität  $C$  und Spule mit Induktivität  $L$ .
- Wie lassen sich Hoch- und Tiefpass aus einem Ohm'schen Widerstand und einem Kondensator realisieren?
- Wie lassen sich Hoch- und Tiefpass aus einem Ohm'schen Widerstand und einer Spule realisieren?
- Wie sieht der Amplituden-Frequenzgang („Durchlasskurve“) beim Hoch- und Tiefpass prinzipiell aus?
- Wie sieht der Amplituden-Frequenzgang („Durchlasskurve“) beim Bandpass und Sperrkreis prinzipiell aus?
- Was versteht man unter der Grenzfrequenz beim Hoch-/Tiefpass?
- Was versteht man unter der Mittenfrequenz beim Bandpass bzw. Sperrkreis?

### 5.4.1 Grundlagen

#### 5.4.1.1 Kurzfassung: Passive Filterschaltungen

Die Grundidee einer Filterschaltung für Wechselspannungen ist es, einen Spannungsteiler aus frequenzabhängigen Widerständen zu bilden und dann die Spannung über einem Teilwiderstand als Ausgangsspannung zu verwenden. Als frequenzabhängige Widerstände kommen bei passiven Filterschaltungen Kondensatoren und Spulen in Frage. Oft werden sie auch mit Ohm'schen Widerständen kombiniert. Für den einfachsten Fall einer Reihenschaltung aus  $R$ ,  $C$  und  $L$  lassen

sich die (Wirk-/Blind-/Schein-)Widerstände dann folgendermaßen berechnen:

$$R = R \quad (5.42)$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (5.43)$$

$$X_L = +\omega L \quad (5.44)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (5.45)$$

Je nachdem, an welchem Bauteil die Ausgangsspannung abgegriffen wird, ergeben sich unterschiedliche Filterwirkungen.

In der Folge wollen wir das etwas genauer betrachten.

#### 5.4.1.2 Auf- und Entladevorgang eines Kondensators

Bei der Auf- oder Entladung eines Kondensators über einen Ohm'schen Widerstand, genauer gesagt, wenn an eine Reihenschaltung aus diesen beiden Bauteilen (ein sog. „RC-Glied“) eine konstante Gleichspannung  $U_{\text{Quelle}}$  angelegt wird, steigt bzw. fällt die Ladung und Spannung am Kondensator exponentiell und nähert sich asymptotisch dem Grenzwert der angelegten Spannung. Die entsprechende Schaltung ist in Abbildung 5.4 zusammen mit den Spannungsverläufen dargestellt.

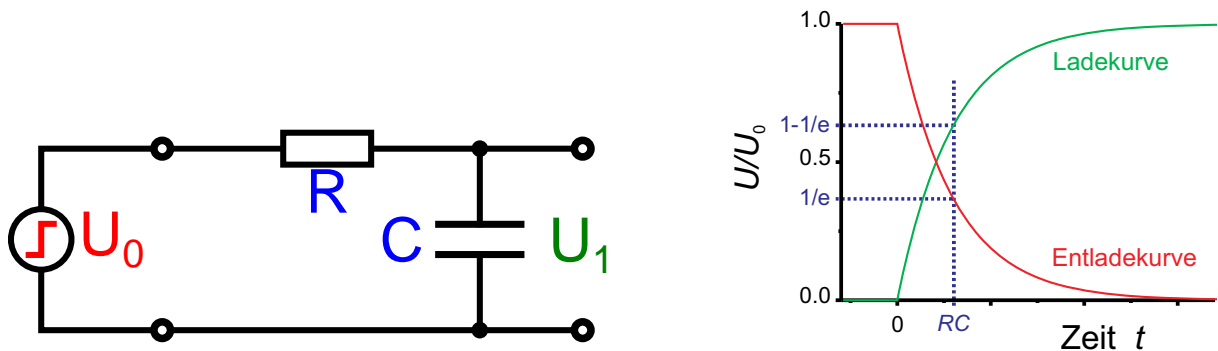


Abbildung 5.4: Schaltbild zur Ladung und Entladung eines Kondensators sowie Lade-/Entladekurve. Dieses Schaltbild dient auch zur Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Gliedes [12].

Man sieht das sehr einfach aus folgenden Überlegungen zu den Spannungen an Ohm'schem Widerstand und Kondensator:

Der Stromkreis besteht aus Spannungsquelle, Ohm'schem Widerstand und Kondensator. Für die jeweiligen Spannungen gilt:

$$U_{\text{Quelle}}(t) = \begin{cases} U_0 & \text{beim Ladevorgang} \\ 0 & \text{beim Entladevorgang} \end{cases}, \quad (5.46)$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \quad (5.47)$$

$$= R \cdot \dot{Q}(t), \quad (5.48)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad (5.49)$$

Nach dem 2. Kirchhoff'schen Gesetz („Maschenregel“) müssen die Spannungen in folgender Beziehung zueinander stehen:

$$U_{\text{Quelle}} = U_R + U_C \quad (5.50)$$

$$\Rightarrow U_{\text{Quelle}} = R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad (5.51)$$

Dies ist eine einfache Differenzialgleichung für die zeitlich veränderliche Ladung  $Q(t)$  auf dem Kondensator, die durch geeignete Exponentialfunktionen gelöst wird:<sup>23</sup>

- Aufladevorgang:

$$U(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (5.52)$$

mit

$$\begin{aligned} U_0 &= \text{angelegte Ladespannung,} \\ R &= \text{Ohm'scher Widerstand,} \\ C &= \text{Kapazität des Kondensators.} \end{aligned} \quad (5.53)$$

- Entladevorgang:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.54)$$

mit

$$\begin{aligned} U_0 &= \text{Spannung des geladenen Kondensators,} \\ R &= \text{Ohm'scher Widerstand,} \\ C &= \text{Kapazität des Kondensators.} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Sie können sich durch Einsetzen leicht davon überzeugen, dass diese Funktionen Lösungen von Gleichung (5.51) sind.

Den Ausdruck  $R \cdot C$  bezeichnet man als Zeitkonstante  $\tau$  des  $RC$ -Gliedes. Die anschauliche Bedeutung ist folgende: Nach der Zeit  $\tau$  ist der Lade- bzw. Entladevorgang bis auf einen Bruchteil  $\frac{1}{e}$  abgeschlossen.

<sup>23</sup>Der Begriff „Differenzialgleichung“ mag anfangs etwas abschreckend klingen. Eine Differenzialgleichung (kurz DGL) ist aber nichts anderes als ein Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen. Der vorliegende Fall ist recht überschaubar, da nur die Ladung  $Q(t)$  und ihre erste Ableitung  $\dot{Q}(t)$  und beide auch nur linear (d. h. nicht quadratisch, nicht als Wurzel, nicht als Argument einer Winkelfunktion, usw.) in der Gleichung vorkommen. Sie können Differenzialgleichungen üblicherweise lösen, indem Sie eine ungefähre Lösungsform „erraten“ (z. B.  $Q(t) = a + b \cdot e^{ct}$ , Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen sind da oft „heiße Kandidaten“), die noch freie Parameter (hier  $a$ ,  $b$  und  $c$ ) enthält. Setzen Sie diese Lösung dann in die DGL ein, so finden Sie auf diese Weise weitere Gleichungen. Zusätzlich formulieren Sie sich dann noch sog. „Randbedingungen“ als Gleichungen, denn eigentlich wissen Sie ja noch mehr über den physikalischen Vorgang, als Sie bis zu diesem Punkt mathematisch erfasst haben. Zum Beispiel können Sie die Aussage, dass der Kondensator zu Beginn des Ladevorgangs keine Ladung trägt, als  $Q(0) = 0$  formulieren. Aus den so gewonnenen Gleichungen können Sie schließlich die noch fehlenden Parameter berechnen.

### 5.4.1.3 Widerstände im Wechselstromkreis

Ein **Ohm'scher Widerstand** verhält sich bei Anlegen einer Wechselspannung  $U(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  so, wie er sich im entsprechenden Zeitpunkt auch bei Anlegen einer Gleichspannung verhalten würde. Es gilt jederzeit das Ohm'sche Gesetz und somit

$$I_R(t) = \frac{U_R(t)}{R} \quad . \quad (5.56)$$

Diese Gleichung kann für beliebige Formen der Wechselspannung stets erfüllt werden, es fließt dann eben einfach der entsprechende Strom. Insbesondere ruft eine sinusförmige Spannung einen sinusförmigen Strom hervor:<sup>24</sup>

$$U_R(t) = U_0 \cdot \sin(\underbrace{2\pi f \cdot t}_{=: \omega}) \quad (5.57)$$

$$= U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad , \quad (5.58)$$

$$I_R(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \sin(\omega t) \quad . \quad (5.59)$$

Fließt ein Strom durch einen Ohm'schen Widerstand, so wird in ihm elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt, d. h. er wird warm. Weil der Widerstand also sozusagen etwas „bewirkt“, spricht man oft auch von einem „Wirkwiderstand“.<sup>25</sup>

Für Kondensatoren und Spulen ist das Verhalten etwas komplizierter.

Betrachten wir zunächst einen **Kondensator**.<sup>26</sup> Bei Anlegen einer Gleichspannung lädt er sich wie oben beschrieben auf und weiter passiert nichts, denn zwischen den Kondensatorplatten befindet sich ja ein elektrisch isolierendes Material. Legt man allerdings eine Wechselspannung an, so wird der Kondensator abwechselnd immer wieder geladen und entladen werden, wobei die Frequenz der Wechselspannung auch die zeitliche Abfolge dieser Lade- und Entladevorgänge bestimmt. Es fließt also immer wieder Strom hin und her, so als ob ein Wechselstrom durch den Kondensator hindurchfließen würde. Wir können die folgende Gleichung für den Strom durch den Kondensator aufstellen:

$$I_C(t) = \dot{Q}_C(t) = \frac{d(U_C(t) \cdot C)}{dt} = C \cdot \dot{U}_C(t) \quad (5.60)$$

Geben wir durch die Spannungsquelle einen festen Spannungsverlauf vor, so liefert Gleichung (5.60) den zugehörigen Stromverlauf.

Ein einfaches Beispiel:<sup>27</sup>

Die Spannung

$$U_C(t) = - \underbrace{U_0}_{\text{Spannungsamplitude}} \cdot \cos(\underbrace{2\pi f}_{\text{Kreisfrequenz } =: \omega} \cdot t) \quad (5.61)$$

$$= -U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (5.62)$$

<sup>24</sup>Genauso würde eine cosinusförmige Spannung einen cosinusförmigen Strom hervorrufen, aber das Beispiel ist im Hinblick auf die weitere Rechnung bewusst so gewählt.

<sup>25</sup>Unter einer *Wirkung* versteht man in der Physik oft auch eine physikalische Größe der Einheit 1 J s, z. B. beim Planck'schen *Wirkungsquantum*. Diese Bedeutung ist hier aber *nicht* gemeint.

<sup>26</sup>In Abschnitt ?? auf Seite ?? finden Sie eine *sehr* anschaulich gehaltene Analogie zu den Vorgängen beim Kondensator im Wechselstromkreis, die es trotz ihrer Einfachheit ermöglicht, den Wechselstromwiderstand quantitativ richtig herzuleiten.

<sup>27</sup>Weiter unten wird klar werden, warum wir gerade diese speziellen Beispiele betrachten.

würde den Strom

$$I_C(t) = -U_0 \cdot C \cdot \frac{d(\cos(\omega t))}{dt} \quad (5.63)$$

$$= \underbrace{U_0 \cdot C \cdot \omega}_{\text{Stromamplitude}} \cdot \sin(\omega t) \quad (5.64)$$

hervorrufen. Wir sehen daran: der Strom hängt sowohl von der Kapazität  $C$  als auch von der Kreisfrequenz  $\omega$  (bzw. der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ) ab. Das Verhältnis zwischen der Spannungsamplitude und der Stromamplitude beträgt

$$\frac{U_0}{U_0 \cdot C \cdot \omega} = \frac{1}{\omega C} \quad (5.65)$$

und ist so etwas wie der „Widerstand“ eines Kondensators für sinusförmigen Wechselstrom der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . Allerdings wird ein idealer Kondensator anders als ein Ohm'scher Widerstand nicht warm, wenn er vom Strom „durchflossen“ wird. Man bezeichnet

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5.66)$$

deshalb als „kapazitiven Blindwiderstand“.

Betrachten wir nun das Verhalten einer **Spule**. Legt man eine Gleichspannung an, so beginnt ein Strom zu fließen. Dabei baut sich ein Magnetfeld auf, so dass die zeitliche Änderung in den Spulenwindungen entsprechend dem Faraday'schen Induktionsgesetz eine Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}(t) = -n \cdot \dot{\Phi}(t)$  hervorruft.<sup>28</sup> Man kann das Faraday'sche Induktionsgesetz speziell für die Anwendung auf eine Spule so umformen, dass der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Spule noch klarer erkennbar wird:<sup>29</sup>

$$U_L(t) = -n \cdot \dot{\Phi}(t) \quad (5.67)$$

$$= -n \cdot \frac{d(B(t) \cdot A)}{dt} \quad (5.68)$$

$$= -n \cdot \dot{B}(t) \cdot A \quad (5.69)$$

$$= -n \cdot \frac{d(\mu_0 \mu_r \cdot (n/l) \cdot I_L(t))}{dt} \cdot A \quad (5.70)$$

$$= -n \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \frac{n}{l} \cdot \dot{I}_L(t) \cdot A \quad (5.71)$$

$$= - \underbrace{\mu_0 \mu_r \cdot \frac{n^2}{l} \cdot A}_{\text{Induktivität } =: L} \cdot \dot{I}_L(t) \quad (5.72)$$

$$= -L \cdot \dot{I}_L(t) \quad (5.73)$$

<sup>28</sup>Das negative Vorzeichen in dieser Formel wird in manchen Büchern ausgiebig diskutiert, ist aber letztlich Konventionssache. Wichtig ist, dass man alle in einer „Masche“ eines Stromkreises (2. Kirchhoff'sches Gesetz, „Maschenregel“) auftretenden Spannungen jeweils in einem ersten Schritt entweder als „Spannungen an einem Widerstand“ oder als „durch Spannungsquelle eingepreßte Spannung“ einteilt (hierin liegt eine gewisse Willkür) und anschließend das Vorzeichen dem Umlaufsinn entsprechend festlegt (die Willkür aus dem ersten Schritt wird hierbei wieder aufgehoben). Man kann also z. B. eine Spule entweder als Spannungsquelle mit der Spannung  $U_L = -L \cdot \dot{I}$  oder als induktiven Widerstand mit der Spannung  $U_L = +L \cdot \dot{I}$  betrachten. Analog dazu stellt ein Kondensator entweder eine Spannungsquelle mit der Spannung  $U_C = -\frac{Q}{C}$  oder einen kapazitiven Widerstand mit der Spannung  $U_C = +\frac{Q}{C}$  dar. Es gibt nun in der Literatur gewisse Traditionen, nach denen bei Kondensatoren die Sichtweise als Widerstand, bei Spulen hingegen die Sichtweise als Spannungsquelle gebräuchlicher ist. Die Physik ändert sich dadurch natürlich nicht. Man muss nur stets aufpassen, welcher „Schule“ der jeweilige Autor angehört, da sich die Vorzeichen in vielen Gleichungen umdrehen.

<sup>29</sup>Einige zur Veranschaulichung aufgeführte Zwischenschritte dieser Umformung gelten nur für schlanke Spulen (d. h. mit einer Länge, die viel größer ist als der Durchmesser) mit konstantem Durchmesser. Es lässt sich aber zeigen, dass das Ergebnis selbst auch allgemein gilt.

mit

$\mu_0$  = magnetische Feldkonstante,  
 $\mu_r$  = Permeabilitätszahl,  
 $\Phi$  = magnetischer Fluss,  
 $B$  = magnetische Flussdichte,  
 $n$  = Windungszahl,  
 $A$  = Fläche der Spule,  
 $l$  = Länge der Spule,  
 $L$  = Induktivität der Spule.

Geben wir uns nun einen festen Stromverlauf vor, so liefert Gleichung (5.73) den zugehörigen Spannungsverlauf an der Spule.

Wieder ein einfaches Beispiel:

Der Strom

$$I_L(t) = \underbrace{I_0}_{\text{Stromamplitude}} \cdot \sin\left(\underbrace{2\pi f}_{\text{Kreisfrequenz } = \omega} \cdot t\right) \quad (5.74)$$

$$= I_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (5.75)$$

würde die Spannung

$$U_L(t) = I_0 \cdot L \cdot \frac{d(\sin(\omega t))}{dt} \quad (5.76)$$

$$= \underbrace{I_0 \cdot L \cdot \omega}_{\text{Spannungsamplitude}} \cdot \cos(\omega t) \quad (5.77)$$

hervorrufen. Wir sehen daran: der Strom hängt sowohl von der Induktivität  $L$  als auch von der Kreisfrequenz  $\omega$  (bzw. der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ) ab. Das Verhältnis zwischen der Spannungsamplitude und der Stromamplitude beträgt

$$\frac{I_0 \cdot \omega L}{I_0} = \omega L \quad (5.78)$$

und ist so etwas wie der „Widerstand einer Spule für sinusförmigen Wechselstrom der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ “. Auch eine ideale<sup>30</sup> Spule wird wie ein Kondensator nicht warm, wenn sie vom Strom durchflossen wird. Man bezeichnet

$$X_L = \omega L \quad (5.79)$$

deshalb als „induktiven Blindwiderstand“.

#### 5.4.1.4 Schreibweise zum vereinfachten Rechnen mit Wechselstromwiderständen

Betrachtet wir die Gleichungen (5.58), (5.62) und (5.77) etwas genauer, so fällt auf, dass die Funktion zwar jeweils „prinzipiell sinusförmig“ ist, dass es aber eben doch gewisse Unterschiede

<sup>30</sup>Eine *reale* Spule wird meist aus Draht gewickelt, der zusätzlich einen Ohm'schen Widerstand hat. Eine solche Spule wird dann natürlich auch warm.

gibt:

$$I(t) \sim +\sin(\omega t) \quad , \quad (5.80)$$

$$U_R(t) \sim +\sin(\omega t) \quad , \quad (5.81)$$

$$U_L(t) \sim +\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t + 90^\circ) \quad , \quad (5.82)$$

$$U_C(t) \sim -\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t - 90^\circ) \quad . \quad (5.83)$$

$$(5.84)$$

Dabei wurde die Amplitude wie allgemein üblich als positive Größe angenommen. Es gibt also auch noch eine Phasenverschiebung der Spannung um  $\pm 90^\circ$  zwischen Spannung und Strom. Man sagt z. B., die Spannung an der Spule „eilt dem Strom um  $90^\circ$  voraus“ oder die Spannung am Kondensator „hinkt dem Strom um  $90^\circ$  hinterher“.<sup>31</sup>

Möchte man Schaltungen untersuchen, die mehrere und vielleicht auch unterschiedliche Bauteile als Reihenschaltung enthalten, dann muss man die jeweilige Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom auch noch mit berücksichtigen. Ein eleganter „Trick“ hierzu ist die Verwendung komplexer Zahlen.<sup>32</sup> In einer Reihenschaltung von  $R$ ,  $L$  und  $C$  werden alle Bauteile vom gleichen

<sup>31</sup>Nachdem wir hier nur unendlich andauernde periodische Funktionen betrachten (also z. B. keine Ein- oder Ausschaltvorgänge) kann man natürlich nicht sagen, dass irgend etwas „zuerst“ da wäre. Die Formulierung soll eigentlich nur andeuten, dass z. B. nach einem Spannungsmaximum an der Spule sehr bald (schon nach einer Viertelperiode) ein Strommaximum auftritt, während es dann länger, nämlich eine Dreiviertelperiode, bis zum nächsten Spannungsmaximum dauert. Beim Kondensator ist es genau umgekehrt.

<sup>32</sup>Die Bezeichnung „komplex“ ist etwas unglücklich gewählt und bedeutet nicht, dass das Rechnen damit „kompliziert“ wäre. Man verwendet sie ja ganz im Gegenteil dazu, die Rechnungen einfacher und übersichtlicher zu machen.

Eine komplexe Zahl  $c$  setzt sich zusammen aus ihrem Realteil  $\operatorname{Re}(c)$  und der imaginären Einheit  $i = \sqrt{-1}$  mal ihrem Imaginärteil  $\operatorname{Im}(c)$  und hat den mathematischen Vorteil, dass sehr viele Formeln unverändert weiter verwendet werden können, auch wenn man mit einer komplexen Zahl sozusagen gleichzeitig mehr aussagen kann.

Es gibt verschiedene Arten, komplexe Zahlen darzustellen. Man kann beispielsweise schreiben

$$c = \operatorname{Re}(c) + i \cdot \operatorname{Im}(c) \quad (5.85)$$

$$= a + i \cdot b \quad . \quad (5.86)$$

Mit einem hochgestellten Stern bezeichnet man den sog. komplex konjugierten Wert einer komplexen Zahl. Hier also

$$c^* := \operatorname{Re}(c) - i \cdot \operatorname{Im}(c) \quad (5.87)$$

$$= a - i \cdot b \quad . \quad (5.88)$$

Eine andere Art ist die Darstellung in der sog. komplexen Zahlenebene. Dabei wird die Zahl als Punkt in einem Koordinatensystem mit dem Realteil nach rechts und dem Imaginärteil nach oben aufgetragen. Man kann die Zahl dann auch durch die Länge des Vektors vom Ursprung zu diesem Punkt, den sog. Betrag  $|c|$  der Zahl und den Winkel  $\varphi$ , den der Vektor mit der reellen Achse einschließt, charakterisieren. Es gilt

$$|c| = \sqrt{(\operatorname{Re}(c))^2 + (\operatorname{Im}(c))^2} \quad , \quad (5.89)$$

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(c)}{\operatorname{Re}(c)} \quad , \quad (5.90)$$

$$c = |c| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad . \quad (5.91)$$

Die letzte Darstellung nennt man auch die Euler'sche Darstellung.

Strom  $I(t)$  durchflossen. Man schreibt dann

$$I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (5.92)$$

$$R = R \quad , \quad (5.93)$$

$$X_L = i\omega L \quad , \quad (5.94)$$

$$X_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C} \quad , \quad (5.95)$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (5.96)$$

$$U_L(t) = i\omega L \cdot I(t) = i\omega L \cdot I_0 e^{i\omega t} \quad , \quad (5.97)$$

$$U_C(t) = \frac{-i}{\omega C} \cdot I(t) = \frac{-i}{\omega C} \cdot I_0 e^{i\omega t} \quad . \quad (5.98)$$

$$(5.99)$$

Natürlich „gibt“ es keine Spannung mit dem Wert  $U = \sqrt{-1}$  oder dergleichen. Wenn man den tatsächlich messbaren Momentanwert einer Spannung wissen möchte, muss man bei den obigen Gleichungen den Realteil der jeweiligen komplexen Spannung bilden.<sup>33</sup>

Der komplexe Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung aus  $R$ ,  $L$  und  $C$  lässt sich damit z. B. ganz einfach berechnen. Er beträgt

$$Z = R + X_L + X_C \quad (5.100)$$

$$= R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \quad (5.101)$$

$$= R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} \quad (5.102)$$

$$= R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad . \quad (5.103)$$

Man bezeichnet diese komplexe Größe meist als Scheinwiderstand, manchmal auch als Impedanz. Statt Real- und Imaginärteil zu schreiben, kann man natürlich auch den Betrag  $|Z|$  und den Winkel  $\varphi$  in der komplexen Zahlenebene angeben. Es gilt:

$$|Z| = \sqrt{Z Z^*} \quad (5.104)$$

$$= \sqrt{\left[ R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \cdot \left[ R - i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]} \quad (5.105)$$

$$= \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad , \quad (5.106)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \quad (5.107)$$

$$= \arctan \frac{(X_L + X_C)/i}{R} \quad (5.108)$$

$$= \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad . \quad (5.109)$$

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung lautet dann in Analogie zum Ohm'schen Gesetz

$$U_Z(t) = Z \cdot I_Z(t) \quad . \quad (5.110)$$

<sup>33</sup>Der Imaginärteil vereinfacht nur die Rechnung und wird sozusagen „nach Gebrauch entsorgt“.

Die gemessenen Werte für Strom und Spannung entsprechen dabei wieder wie oben beschrieben den Realteilen von Strom bzw. Spannung.

Völlig analog verfährt man mit anderen Kombinationen, wie z. B. einer Parallelschaltung. Man verwendet einfach die für Ohm'sche Widerstände bekannten Formeln, setzt aber statt  $R$  jeweils  $Z$  ein. Komplizierte Überlegungen über Phasenverschiebungen oder dergleichen sind somit nicht mehr nötig.

#### 5.4.1.5 RC-Hoch/Tiefpass

Ein  $RC$ -Hoch- oder  $RC$ -Tiefpass ist nichts anderes als ein Spannungsteiler, der mit Wechselspannung betrieben wird. Man legt das Eingangssignal an die Reihenschaltung aus Ohm'schem Widerstand  $R$  und Kondensator (Kapazität  $C$ ) und greift die Ausgangsspannung entweder über dem Ohm'schen Widerstand (Hochpass) oder über dem Kondensator (Tiefpass) ab. Die Schaltbilder sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Da der kapazitive Blindwiderstand des Kondensators nach Gleichung (5.95) frequenzabhängig ist, wird das Verhältnis von Ausgangssignal zu Eingangssignal ebenfalls von der Frequenz abhängen, so dass man je nach Anwendungszweck entweder tiefe oder hohe Frequenzen bevorzugt weiterleiten und die anderen Frequenzen unterdrücken kann.

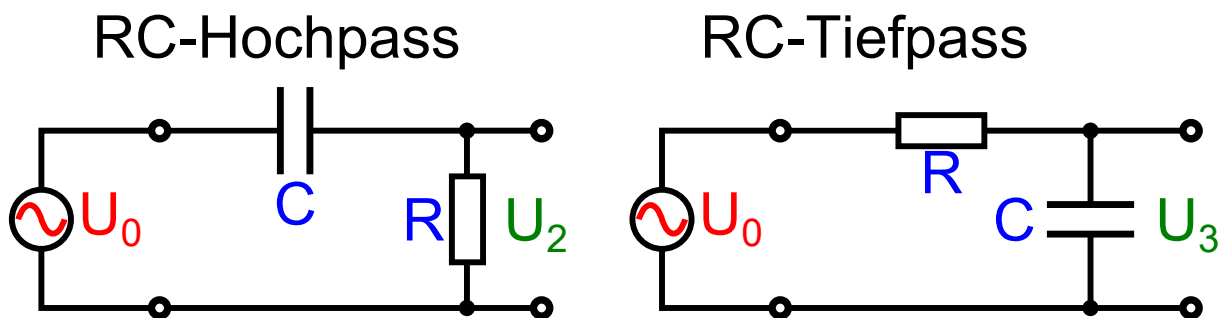


Abbildung 5.5: Schaltbilder für den  $RC$ -Hochpass und den  $RC$ -Tiefpass [12].

Es gilt für den Hochpass

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{R}{R + X_C} \quad (5.111)$$

$$= \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad (5.112)$$

$$\left| \frac{U_2}{U_0} \right| = \left| \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \right| \quad (5.113)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \quad (5.114)$$

und für den Tiefpass

$$\frac{U_3}{U_0} = \frac{X_C}{R + X_C} \quad (5.115)$$

$$= \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad (5.116)$$

$$\left| \frac{U_3}{U_0} \right| = \left| \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} \right| \quad (5.117)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (5.118)$$

Als „Grenzfrequenz“<sup>34</sup> bezeichnet man den Wert  $\omega_{\text{gr}}$  für die Kreisfrequenz, bei dem der Wert das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung gerade  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  beträgt. Aus den Gleichungen (5.114) und (5.118) kann man sofort herleiten, dass hierfür

$$\omega_{\text{gr}} = \frac{1}{RC} \quad (5.119)$$

gelten muss. Die Grenzfrequenz ist also der Kehrwert der schon von der Kondensatorauf- und -entladung bekannten Zeitkonstante  $\tau = RC$ .

Das Ausgangssignal ist gegenüber dem Eingangssignal phasenverschoben. Für den Winkel  $\delta$  der Phasenverschiebung ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (5.112) beim Hochpass

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}(U_2/U_0)}{\text{Re}(U_2/U_0)} \quad (5.120)$$

$$= \frac{1}{\omega RC} \quad (5.121)$$

und unter Verwendung von Gleichung (5.116) beim Tiefpass

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}(U_3/U_0)}{\text{Re}(U_3/U_0)} \quad (5.122)$$

$$= -\omega RC \quad (5.123)$$

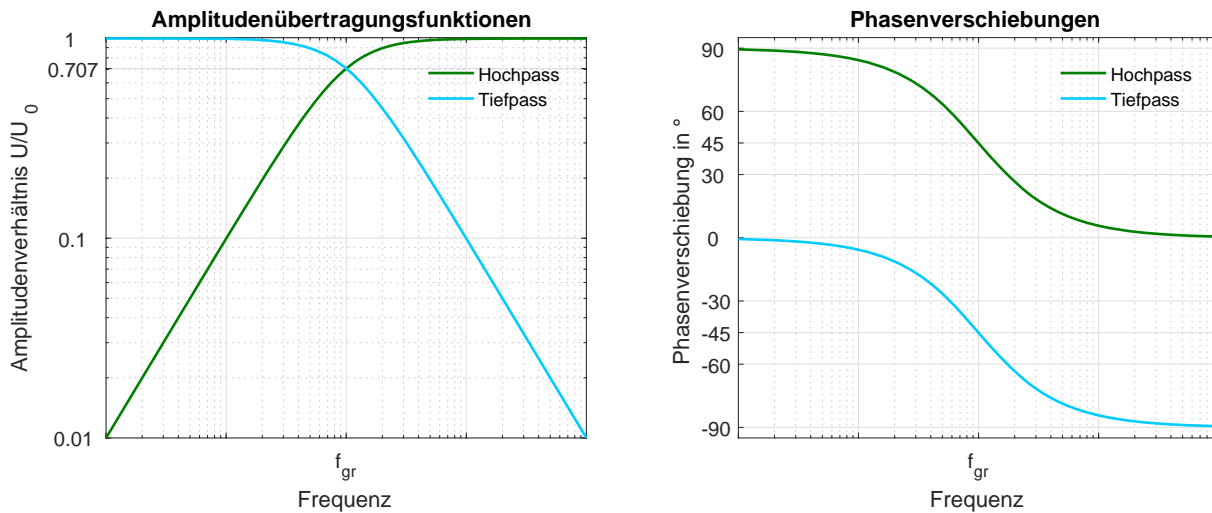
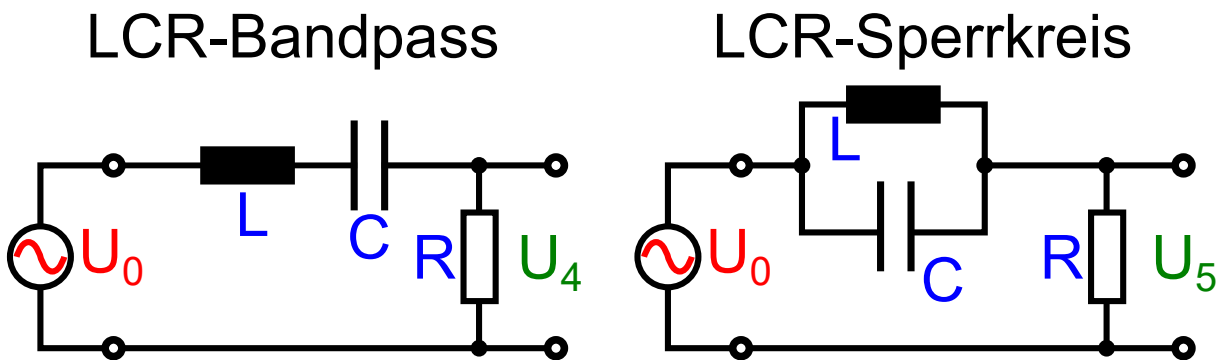
In Abbildung 5.6 sind die Amplitudenverhältnisse von Ausgangssignal  $U$  zu Eingangssignal  $U_0$  und die gegenseitigen Phasenverschiebungen grafisch dargestellt.

#### 5.4.1.6 LCR-Bandpass und -Sperrkreis

Weitere Filterschaltungen, bei denen nur ein bestimmtes Frequenzintervall durchgelassen bzw. gesperrt wird, sind der LCR-Bandpass und der LCR-Sperrkreis. Die Schaltbilder sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Die Berechnung der Ausgangsspannung und der Phasenverschiebung erfolgt analog zum RC-Hoch-/Tiefpass.

In Abbildung 5.8 sind die Amplitudenverhältnisse von Ausgangssignal  $U$  zu Eingangssignal  $U_0$  und die gegenseitigen Phasenverschiebungen grafisch dargestellt.

<sup>34</sup>Eigentlich müsste es „Grenzkreisfrequenz“ heißen, aber wie auch häufig sonst wird hier der kürzere wenn auch nicht ganz korrekte Ausdruck mehrheitlich bevorzugt. Solange man das Formelzeichen  $\omega$  benutzt, ist die Verwechslungsgefahr gering.

Abbildung 5.6: Amplituden- und Phasenverlauf für den  $RC$ -Hochpass und den  $RC$ -Tiefpass [12].Abbildung 5.7: Schaltbilder des  $LCR$ -Bandpasses und -Sperrkreises [12].

### 5.4.2 Versuchsdurchführung

Versuchsteil I: Zeitkonstante eines  $RC$ -Gliedes:

- Bauen Sie die Schaltung nach Abbildung 5.4 auf.
- Wählen Sie für die Spannungsquelle ein Rechtecksignal.
- Wählen Sie die Frequenz der Spannungsquelle und die Simulationszeit so, dass die exponentielle Ladekurve im Diagramm gut sichtbar wird.
- Bestimmen Sie die Zeitkonstante  $\tau$  für mindestens fünf verschiedene  $RC$ -Kombinationen. Hinweis: Die Messung geht schneller und wird genauer, wenn Sie nicht direkt  $\tau$  ablesen, sondern die Zeit  $T_{\frac{1}{2}}$ , in der die Spannung auf den halben Endwert ansteigt. Sie können dann später bei der Auswertung umrechnen.

Versuchsteil II:  $RC$ -Hoch- und -Tiefpass:

Hinweis: In der Simulation können Sie statt der im Folgenden beschriebenen Messungen von Spannungen bei einzelnen Frequenzen auch direkt die „Sweep“-Funktion von LTspice nutzen,

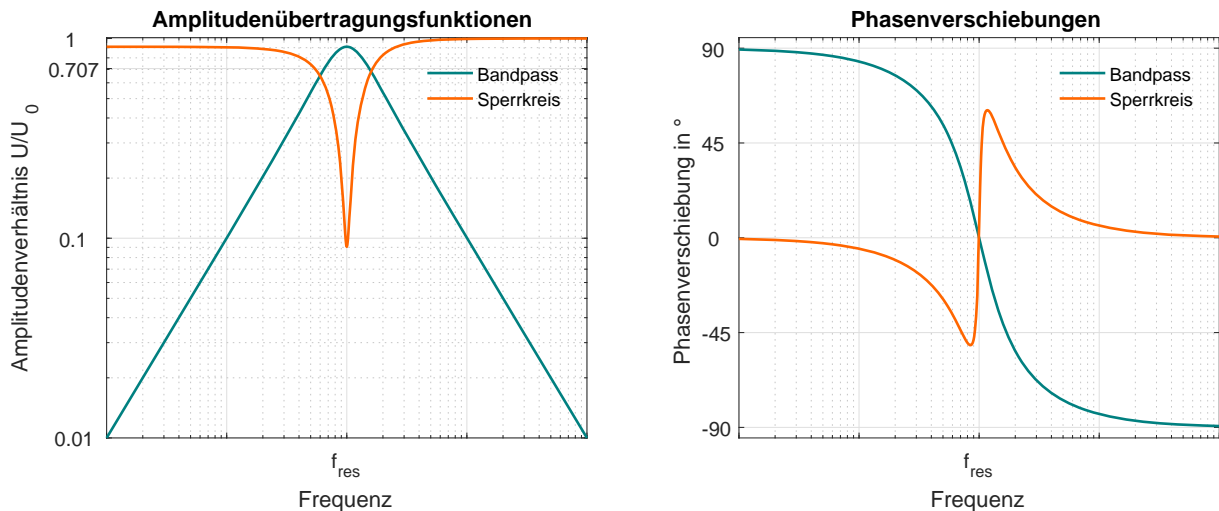


Abbildung 5.8: Amplituden- und Phasenverlauf für den  $LCR$ -Bandpass und -Sperrkreis [12].

wie Sie das im Einführungsversuch bereits getan haben. Ziel ist aber auch dann eine Darstellung der Messwerte mit logarithmischen Achsen, wie im Auswertungsteil beschrieben.

- e) Wählen Sie für den Kondensator eine beliebige Kapazität im Bereich von 10 nF bis 100 nF.
- f) Bauen Sie die Hochpass- bzw. Tiefpass-Schaltung nach Abbildung 5.5 auf. Verwenden Sie dazu einen Widerstand mit  $R = 600 \Omega$ .
- g) Wählen Sie für die Spannungsquelle ein Sinussignal.
- h) Nehmen Sie für den Hochpass und den Tiefpass jeweils eine Durchlasskurve auf, d. h. messen Sie dabei für *sinnvoll gewählte*(!) Frequenzen jeweils die Amplitude  $U_2$  bzw.  $U_3$  der Ausgangsspannung.<sup>35</sup>
  - Hinweis:  
Sinnvoll könnte sein, in 4 Dekaden jeweils mit den Vorfaktoren 1; 1,5; 2; 3; 5; 7 zu messen. Das liefert 24 Werte von 100 Hz bis 700 kHz.
  - Tragen Sie die Messwerte beider Schaltungen sofort grafisch auf, und zwar beide in das selbe Diagramm. Verwenden Sie für beide Achsen eine logarithmische Skala. Der Schnittpunkt der Durchlasskurven liefert Ihnen die Grenzfrequenz  $f_{gr}$ .
  - Messen Sie dann zusätzlich jeweils bei 6 Frequenzen in der Nähe der Grenzfrequenz.
- i) Bestimmen Sie für die drei Fälle  $f \ll f_{gr}$ ,  $f \approx f_{gr}$  und  $f \gg f_{gr}$  jeweils die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung sowohl am Hoch- als auch am Tiefpass.

Versuchsteil III:  $LCR$ -Bandpass und -Sperrkreis:

Hinweis: In der Simulation können Sie statt der im Folgenden beschriebenen Messungen von Spannungen bei einzelnen Frequenzen auch direkt die „Sweep“-Funktion von LTspice nutzen,

<sup>35</sup>In der Simulation können Sie davon ausgehen, dass die Spannungsquelle auch unter Belastung die Amplitude ihrer Ausgangsspannung und damit die Amplitude  $U_0$  der Eingangsspannung der Siebschaltung konstant halten kann. In einem Realexperiment wäre ein Funktionsgenerator dazu normalerweise nicht in der Lage, deshalb müssten Sie im Labor für jede Schaltung und jede Frequenz stets die Amplitude  $U_0$  der Eingangsspannung und die Amplitude  $U_2$  bzw.  $U_3$  der Ausgangsspannung messen, um anschließend das Verhältnis bilden zu können.

wie Sie das im Einführungsversuch bereits getan haben. Ziel ist aber auch dann eine Darstellung der Messwerte mit logarithmischen Achsen, wie im Auswertungsteil beschrieben.

- j) Bauen Sie nacheinander die Bandpass- und Sperrkreis-Schaltung nach Abbildung 5.7 auf. Verwenden Sie dazu eine Spule mit  $L = 10 \text{ mH}$  (ideale Spule ohne internen Ohm'schen Serienwiderstand), einen Kondensator mit  $C = 27 \text{ nF}$  und einen Ohm'schen Widerstand mit  $R = 600 \Omega$ .
- k) Wählen Sie für die Spannungsquelle ein Sinussignal.
  - l) Variieren Sie die Frequenz am Funktionsgenerator und beobachten Sie im  $U(t)$ -Diagramm das Verhalten der Ausgangsspannung (zunächst ohne die Messdaten zu notieren), um den prinzipiellen Verlauf der Durchlasskurve herauszufinden.
- m) Nehmen Sie für die Filterschaltung eine Durchlasskurve auf, d. h. messen Sie für *sinnvoll gewählte* (!) Frequenzen jeweils die Amplituden  $U_0$  der Eingangsspannung und  $U_4$  bzw.  $U_5$  der Ausgangsspannung.
  - Hinweis:  
Sinnvoll könnte sein, in 4 Dekaden jeweils mit den Vorfaktoren 1; 1,5; 2; 3; 5; 7 zu messen. Das liefert 24 Werte von 100 Hz bis 700 kHz.  
Messen Sie dann zusätzlich jeweils bei 6 Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz.
- n) Bestimmen Sie für die drei Fälle  $f \ll f_0$ ,  $f = f_0$  und  $f \gg f_0$  jeweils die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung.<sup>36</sup>

### 5.4.3 Auswertung

Hinweise:

- Verwenden Sie bei den Filterschaltungen für alle Amplituden-Diagramme Darstellungen, bei denen sowohl die Frequenz als auch das Verhältnis der Spannungsamplituden logarithmisch aufgetragen werden („doppelt logarithmische Darstellung“).
  - Für die Diagramme der Phasenverschiebung wählen Sie Darstellungen, bei denen die Frequenz logarithmisch, die Phasenverschiebung aber linear aufgetragen ist („einfach logarithmische Darstellung“ oder auch „halblogarithmische Darstellung“).
- a) Berechnen Sie die Zeitkonstante des  $RC$ -Gliedes auf verschiedene Arten:
    - (a) aus den Werten von  $R$  und  $C$ ,
    - (b) aus den Lade- und Entladekurven, sowie
    - (c) aus der Grenzfrequenz  $f_{\text{gr}}$ .
  - b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Signifikanztests, ob die auf unterschiedliche Weise bestimmten Werte der Zeitkonstante miteinander vereinbar sind.
  - c) Durchlasskurven

<sup>36</sup> $f_0$  bezeichnet die Mittenfrequenz. Für diese Frequenz ist das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal beim Bandpass maximal, beim Sperrkreis minimal.

- (a) Zeichnen Sie die Durchlasskurven für alle untersuchten Filterschaltungen.
- (b) Lesen Sie aus den Diagrammen die Steilheit der Durchlasskurven des  $RC$ -Hoch- und -Tiefpasses für Frequenzen  $f \ll f_{gr}$  bzw.  $f \gg f_{gr}$  ab. Geben Sie die Werte in der Einheit  $\frac{\text{dB}}{\text{Oktave}}$  an.
- d) Diskutieren Sie Ihre Messwerte zur Phasenverschiebung (ebenfalls für alle untersuchten Filterschaltungen).

#### 5.4.4 Fragen und Aufgaben

Derzeit keine!

#### 5.4.5 Zusätzliche Informationen

##### 5.4.5.0.1 Filter höherer Ordnung

Durch die Hintereinanderschaltung mehrerer Filterglieder kann man eine höhere Flankensteilheit erreichen. Für  $LC$ -Halbglieder siehe z. B.

- <https://www.elektroniktutor.de/analogtechnik/filter.html>.

Es gibt noch viele andere Schaltungsmöglichkeiten zur Realisierung von Filtern, die nicht Teil dieses Versuchs sind. Siehe z. B. unter

- [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Filter\\_\(Elektrotechnik\)&oldid=194012910](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Filter_(Elektrotechnik)&oldid=194012910),
- <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Butterworth-Filter&oldid=185306545#Filterrealisierung>,
- [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Butterworth\\_filter&oldid=944627575](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Butterworth_filter&oldid=944627575) und
- [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Electronic\\_filter\\_topology&oldid=935632009](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Electronic_filter_topology&oldid=935632009).

##### 5.4.5.1 Aktive Filterschaltungen

Die Filtereigenschaften (Flankensteilheit, ebener Frequenzgang, ...) lassen sich verbessern, indem neben den passiven Bauteilen zusätzlich auch aktive Bauteile wie Transistoren oder Operationsverstärker eingesetzt werden. Dabei kann auch bei niedrigen Frequenzen auf den Einsatz von (in diesem Fall großen und teuren) Spulen verzichtet werden, wodurch sich gleichzeitig eine höhere Filtergüte erreichen lässt. Die ausführliche Behandlung dieser Filtertypen übersteigt aber den zeitlichen Rahmen dieses Praktikumsversuchs. Bei Interesse finden Sie Informationen hierzu z. B. unter [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Filter\\_\(Elektrotechnik\)&oldid=194012910#Aktive\\_Filter\\_oder\\_elektronische\\_Filter](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Filter_(Elektrotechnik)&oldid=194012910#Aktive_Filter_oder_elektronische_Filter). Ein Beispiel für eine derartige Filterschaltung ist der Sallen-Key-Filter (siehe z. B. unter <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sallen-Key-Filter&oldid=195481189>).