

## 5.1 Elementarladung nach Millikan @home

### Hard- und Software-Voraussetzungen:

- Computer (Windows/macOS/Linux) oder Tablet (iPadOS/Android)  
Hinweis: Ein Smartphone bietet an dieser Stelle ein etwas zu kleines Display, das macht die Bedienung schwierig bis unmöglich.
- Webbrowser mit JavaScript
- Origin oder ähnliche Software zur Auswertung

### Ziel

Bestimmung der Elementarladung  $e$  aus der Bewegung geladener Öltröpfchen unter Einfluss der Erdbeschleunigung und elektrischer Felder.

### Hinweise zur Vorbereitung

Die Antworten auf diese Fragen sollten Sie vor der Versuchsdurchführung wissen. Sie sind die Grundlage für das Gespräch mit Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor vor dem Versuch. Informationen zu diesen Themen erhalten Sie in der unten angegebenen Literatur.

- a)
  - Wie sieht das elektrische Feld eines Plattenkondensators aus?
  - Welche Kraft wirkt auf ein geladenes Öltröpfchen im homogenen elektrischen Feld?
  - Welche sonstigen Kräfte sind in diesem Versuch für die geladenen Öltröpfchen zu berücksichtigen?
- b)
  - Was versteht man unter Viskosität?
  - Unter welchen Bedingungen tritt Stokes'sche Reibung auf?
  - Wie lautet das Stokes'sche Reibungsgesetz und was ist die Cunningham'sche Korrektur dieses Gesetzes?
  - Was versteht man unter der mittleren freien Weglänge in Gasen?
  - Warum kann man mit einem Lichtmikroskop Öltröpfchen beobachten, die nur wenig größer sind als die Wellenlänge des verwendeten Lichts?
- c)
  - Welche anderen Bestimmungsmöglichkeiten der Elementarladung gibt es?
  - Wie funktioniert insbesondere die Bestimmung mittels des Faraday'schen Gesetzes der Elektrolyse?
  - Wie kann die dafür benötigte Avogadro-Konstante<sup>1</sup> bestimmt werden?

### Zubehör

JavaScript-Simulation des Versuchs unter  
<https://www.schoett-web.de/physik/elektromagnetismus/2/index.html>  
 Eigenschaften der simulierten Messanordnung:

- regelbare Gleichspannungsquelle 0 V bis 500 V

---

<sup>1</sup>Vor allem in älterer Literatur heißt die Avogadro-Konstante  $N_A$  oft Loschmidt-Zahl  $N_L$ .

- Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- Abstand der Kondensatorplatten  $d = 5,0 \text{ mm}$
- Dichte des Öls  $\rho_{\text{Öl}} = 886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Dichte der Luft  $\rho_{\text{Luft}} = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Dynamische Viskosität der Luft  $\eta = 1,71 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$
- zwei Stoppuhren

### 5.1.1 Grundlagen

#### Erzeugung der Öltröpfchen und auf sie wirkende Kräfte

In einem Zerstäuber wird Öl in sehr kleine Tröpfchen „zerlegt“. Bei diesem Vorgang verteilen sich die positiven und negativen Ladungen oft nicht gleichmäßig auf die Tröpfchen, so dass viele geladene Tröpfchen entstehen. Die Ladung  $q$  beträgt dabei stets ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung  $e$ . Man bringt ein Tröpfchen der Masse  $m$  in das homogene Feld  $\vec{E}$  eines Plattenkondensators und lässt es im Gravitationsfeld der Erde fallen. Die viskose Reibung in der Luft (Viskosität  $\eta$ ) erzeugt dabei eine der Geschwindigkeit proportionale bremsende Kraft, so dass sich nach kurzer Zeit eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  einstellt.

Auf das Tröpfchen wirken dann die folgenden Kräfte:

- Gravitationskraft

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} \quad , \quad (5.1)$$

- Auftriebskraft

$$\vec{F}_A = -V \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot \vec{g} \quad , \quad (5.2)$$

- Stokes'sche Reibungskraft

$$\vec{F}_{\text{R,Stokes}} = -6\pi\eta r \vec{v} \quad , \quad (5.3)$$

- elektrostatische Kraft (Coulomb-Kraft)

$$\vec{F}_{\text{el}} = q \cdot \vec{E} \quad . \quad (5.4)$$

Die elektrische Kraft  $F = -e \cdot E = -e \cdot \frac{U}{d}$  kann bei festem Plattenabstand  $d$  über die Spannung  $U$  am Kondensator geregelt und vor allem auch umgepolt und ausgeschaltet werden.

Die Stokes'sche Reibungskraft wirkt immer entgegen der Bewegungsrichtung, ändert also ihr Vorzeichen, je nachdem, ob sich das Tröpfchen gerade nach oben oder unten bewegt.

#### Cunningham-Korrektur

Das Stokes'sche Reibungsgesetz gilt streng nur im Rahmen der Kontinuumsmechanik und daher nicht für allzu kleine Tröpfchen, deren Abmessungen so gering sind, dass ihre mittlere freie Weglänge in Luft nicht mehr vernachlässigbar ist.<sup>2</sup> Solche Kügelchen können quasi „zwischen

<sup>2</sup>Meist vergleicht man den Radius der Tröpfchen mit der mittleren freien Weglänge der Luftteilchen. Diese beiden Bedingungen liefern sehr ähnliche Ergebnisse.

den Luftmolekülen hindurchfallen“. Dieser Effekt kann mit einem korrigierten Reibungsgesetz nach Cunningham berücksichtigt werden:

$$F_{R,\text{korr}} = \frac{-6\pi\eta r \cdot v}{1 + A\frac{\lambda}{r}} = \frac{-6\pi\eta r \cdot v}{1 + \frac{B}{p \cdot r}} \quad (5.5)$$

mit

$$\begin{aligned} A, B &= \text{empirisch zu bestimmende Konstanten} \\ \lambda &= \text{mittlere freie Weglänge der Moleküle der Luft} \\ p &= \text{Luftdruck} \end{aligned}$$

Zur Anwendung dieser korrigierten Formel muss der Tröpfchenradius eigentlich schon bekannt sein. Um die Rechnung zu vereinfachen, bestimmen wir im Praktikum den Radius zunächst aus der feldfreien Messung ohne die Korrektur, wenden dann aber im nächsten Schritt bei der Messung mit elektrischem Feld die korrigierte Formel an. Wir führen also sozusagen nur eine „Cunningham-Korrektur 1. Ordnung“ durch.

Der Literaturwert (siehe z. B. [7]) für die Cunningham-Konstante  $B$  beträgt in Luft

$$B = 6,17 \cdot 10^{-3} \text{ Torr} \cdot \text{cm} = 8,226 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m} \quad . \quad (5.6)$$

### Messung ohne elektrisches Feld

Die Tröpfchen fallen im Gravitationsfeld der Erde mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  nach unten.<sup>3</sup>

Aus dem Kräftegleichgewicht

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} \cdot g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} \cdot g + 6\pi\eta r \cdot v_0 \quad (5.7)$$

folgt für den Tröpfchenradius unmittelbar:

$$r = 3 \cdot \sqrt{\frac{\eta \cdot v_0}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g}} \quad , \quad (5.8)$$

wobei die Geschwindigkeit nach

$$v_0 = \frac{s_0}{t_0} \quad (5.9)$$

als Quotient aus Sinkstrecke  $s_0$  und Sinkzeit  $t_0$  bestimmt werden kann.

### Messung mit elektrischem Feld

Da die Tröpfchen wie bereits erwähnt beim Zerstäuben oft elektrisch geladen werden („Reibungselektrizität“), kann ihre Bewegung durch Anlegen eines elektrischen Feldes beeinflusst werden. Hierzu werden die Tröpfchen der Ladung  $q$  in das homogene Feld eines Plattenkondensators

<sup>3</sup>In den Gleichungen (5.7) bis (5.12) bzw. bis (5.15) bedeuten  $v_0$ ,  $v_{\text{auf}}$ ,  $v_{\text{ab}}$ ,  $U$  und  $E$  jeweils die positiven Beträge der entsprechenden Geschwindigkeiten, der Kondensatorspannung und der elektrischen Feldstärke.

gebracht. Dessen Feldstärke  $E$  kann über die angelegte Spannung  $U$  geregelt werden, denn es gilt bei einem Plattenabstand  $d$ :

$$E = \frac{U}{d} \quad . \quad (5.10)$$

Ist die elektrische Kraft groß genug, so fallen die Tröpfchen nicht länger nach unten, sondern bewegen sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_{\text{auf}}$  nach oben.

Polt man die Spannung um, so läuft das Tröpfchen schneller nach unten als ohne elektrisches Feld, nämlich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_{\text{ab}}$ . Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit stellt sich in allen Fällen praktisch sofort ein. Bei der Aufwärtsbewegung gilt das Kräftegleichgewicht

$$q \cdot E - \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g = 6\pi\eta r \cdot v_{\text{auf}} \quad . \quad (5.11)$$

Lässt man das Tröpfchen stets ohne elektrisches Feld fallen, so folgt aus den Gleichungen (5.7) und (5.11) für die Tröpfchenladung

$$q = \frac{18\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3}{(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g}} \cdot (v_0 + v_{\text{auf}}) \cdot \sqrt{v_0} \quad . \quad (5.12)$$

Ein alternatives Auswertungsverfahren ist in der Fußnote beschrieben.<sup>4</sup>

Die so erhaltenen Werte für die Ladung müssen nach Cunningham noch korrigiert werden. Der Zusammenhang zwischen der unkorrigierten Ladung  $q$  und der korrigierten Ladung  $q_0$  lautet:

$$q_0^{2/3} \left( 1 + \frac{B}{p \cdot r} \right) = q^{2/3} \quad . \quad (5.16)$$

Trägt man für Tröpfchen mit unterschiedlichem Radius jeweils  $q^{2/3}$  über  $\frac{1}{p \cdot r}$  auf, so erhält man einen linearen Zusammenhang, aus dem sich die Konstante  $B$  bestimmen lässt.

## Umladung der Tröpfchen

In der Realität tritt ein zusätzliches Phänomen auf, das allerdings in der Simulation nicht implementiert ist:

Beobachtet man ein bestimmtes Tröpfchen über längere Zeit, so ändert sich in der Realität u. U. seine Ladung  $q$ . Dabei entspricht die Ladungsänderung stets einem ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung. Man kann die Tröpfchen auch zusätzlich ionisierender Strahlung aussetzen, dann ändert sich ihre Ladung  $q$  sogar noch häufiger.

<sup>4</sup>Bei der Abwärtsbewegung hat man zwei Möglichkeiten: mit oder ohne Feld. Bei der Auswertung ist die Wahl natürlich entsprechend zu berücksichtigen. Lässt man das Tröpfchen stets ohne elektrisches Feld fallen, so folgt aus den Gleichungen (5.7) und (5.11) für die Tröpfchenladung Gleichung (5.12).

Legt man alternativ auch während der Abwärtsbewegung das elektrische Feld an, so gilt

$$q \cdot E + \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g = 6\pi\eta r \cdot v_{\text{ab}} \quad (5.13)$$

und man kann durch Subtraktion bzw. Addition der Gleichungen (5.11) und (5.13) zunächst den Tröpfchenradius  $r$  und anschließend auch die Tröpfchenladung  $q$  wie folgt berechnen:

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta}{(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g}} \cdot \sqrt{v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}}} \quad (5.14)$$

$$q = \frac{9\pi}{2} \cdot \frac{d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3}{(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g}} \cdot (v_{\text{ab}} + v_{\text{auf}}) \cdot \sqrt{v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}}} \quad . \quad (5.15)$$

### Dunkelfeldbeleuchtung

Der Durchmesser der Öltröpfchen liegt im Bereich von  $\lesssim 1 \mu\text{m}$ . Das übersteigt das Auflösungsvermögen üblicher optischer Mikroskope. Bei seitlicher Beleuchtung sind die Tröpfchen durch das an ihnen gestreute Licht trotzdem als helle Punkte vor dunklem Hintergrund<sup>5</sup> sichtbar. Allerdings hat der scheinbare Durchmesser der Punkte in der Realität nichts mit dem wahren Tröpfchenradius zu tun. Dieser muss daher unbedingt aus einem „Fallexperiment“ bestimmt werden. Auch in der Simulation kann man nicht aus der angezeigten „Größe“ der „Tröpfchen“ ihren Durchmesser bestimmen.

#### 5.1.2 Versuchsdurchführung

Hinweis: Beobachten Sie bevorzugt langsame Tröpfchen, denn bei denen ist die Chance größer, dass sie nur wenige Ladungen tragen und dass dadurch die „Stückelung“ der Ladung gut sichtbar wird.

a) Präparieren Sie ein geeignetes Tröpfchen folgendermaßen heraus:

- Wählen Sie zunächst ein Tröpfchen aus, das sich relativ langsam bewegt. Eine niedrige Geschwindigkeit bedeutet nämlich, dass Radius und Masse klein sind, wodurch dann schon die elektrische Kraft auf nur eine oder wenige Elementarladungen eine mit der Gewichtskraft vergleichbare Größe erreicht.
- Legen Sie probeweise die Spannung mit wechselnder Polarität an die Kondensatorplatten an, um zu sehen, ob das Tröpfchen dabei seine Bewegungsrichtung ändert *und* sich in *beiden* Richtungen mit einer gut messbaren Geschwindigkeit bewegt. Nur dann ist die Ladung weder zu groß noch zu klein.  
Wählen Sie ein anderes Tröpfchen, falls nicht alle Bedingungen erfüllt sind.

b) Messen Sie für eine größere Zahl von Tröpfchen (mindestens 10, besser 15, um tatsächlich Häufungen sehen zu können) jeweils die Fallgeschwindigkeit ohne elektrisches Feld, sowie die Steiggeschwindigkeit mit elektrischem Feld.

Hinweise:

- Die Fallgeschwindigkeit mit elektrischem Feld ist für die Auswertung nicht unbedingt nötig. Sie können sie dennoch zusätzlich bestimmen, wenn Sie die alternativen Auswerteformeln (5.14) und (5.15) verwenden wollen.
- Lassen Sie jedes Tröpfchen mehrfach nach oben und unten durch die Messstrecke laufen. Sie können auf diese Weise die Messgenauigkeit erhöhen. Überlegen Sie sich, wie Sie die Messung durchführen müssen, um alle Schalter bedienen zu können.

#### 5.1.3 Auswertung

Für die Cunningham-Konstante dürfen Sie den im Grundlagenteil angegebenen Literaturwert benutzen. Wenn Sie möchten, können Sie allerdings auch aus Messungen an unterschiedlich großen Öltröpfchen die Konstante  $B$  selbst bestimmen, indem Sie wie oben bereits erwähnt  $q^{2/3}$  über  $\frac{1}{p \cdot r}$  auftragen und eine Ausgleichsgerade an die Punkte legen. Deren Steigung ist dann  $B \cdot q_0^{2/3}$ .

<sup>5</sup>Daher kommt die Bezeichnung „Dunkelfeldbeleuchtung“.

- a) Bestimmen Sie Radius und Ladung jedes beobachteten Öltröpfchens.
- b) Tragen Sie die berechneten Ladungen graphisch auf und suchen Sie nach Häufungsbereichen.
- c) Ermitteln Sie hieraus den Wert der Elementarladung  $e$ .
- d) Seit dem Inkrafttreten des neuen SI am 20. Mai 2019 hat die Elementarladung und damit auch die Ladung des Elektrons einen fest definierten Wert ohne Unsicherheit, da die Elementarladung zu den definierenden Konstanten des SI gehört. Es gilt  $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , die Ladung des Elektrons ist  $-e$ . Vergleichen Sie mit Hilfe eines Signifikanztests Ihr Ergebnis mit diesem „Literaturwert“.

#### 5.1.4 Ergänzende Informationen

##### Historisches

Der von R. A. Millikan entwickelte und durchgeführte Versuch bot erstmals die Gelegenheit, die Existenz einer Elementarladung direkt zu beweisen und eröffnete gleichzeitig die Möglichkeit, ihren Wert sehr genau zu bestimmen.

##### 5.1.5 Literaturhinweise

Historische Publikationen von R. A. Millikan: [8, 9, 10].

In einer Publikation aus dem Jahr 2000 wird dargestellt, wie mit Hilfe einer automatischen Messapparatur über 40 Millionen Tröpfchen vermessen wurden, um evtl. Bruchteile von Elementarladungen zu finden [11].