

C. Messunsicherheitsanalyse (MUA)

C.1. Messung und Messunsicherheit – Eine kleine Einführung

Arbeitsversion für das WiSe 2017/2018

Diese Datei wird jeweils passend zum Fortgang der Einführungsvorlesung erweitert.

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.“

— Wilhelm WEBER¹

C.1.1. Vorbemerkung

Diese Einführung in die Bestimmung physikalischer Größen („Messvorgang“) und der zugehörigen Messunsicherheiten erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie legt auch keinen allzu großen Wert auf mathematische Exaktheit, solange die Verwendbarkeit der Aussagen für naturwissenschaftliche Experimente dadurch nicht beeinträchtigt wird. Sie soll den Teilnehmerinnen und Teilnehmern am Physikalischen Anfängerpraktikum den Einstieg in diesen wichtigen Teil der experimentellen Naturwissenschaften erleichtern.

C.1.2. Physikalische Größen

Der Wert einer physikalischen Größe ist eine quantitative Aussage über ein Merkmal eines physikalischen Objektes.

Beispiele: Länge, Fläche, Volumen, Masse, Dichte, Temperatur, Geschwindigkeit, Impuls, Drehimpuls, ...

¹Dieses Zitat wird oft C. F. GAUSS zugeschrieben, aber:

Friedrich Wilhelm KISTERMANN schreibt in „Zum 400. Geburtstag von Wilhelm Schickard“, Zweites Tübinger Schickard-Symposium 25.-27. Juni 1992, herausgegeben von Friedrich Seck, Jan Thorbecke Verlag, Sigmaringen, 1995 in einer Fußnote ([Kis95] S. 248):

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen als durch die maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.“ Ein meist C. F. Gauß zugeschriebener Ausspruch, der aber nach E. Hammer von dem sehr bekannten Wasserbaumeister Gotthilf Hagen überliefert ist und von einem berühmten Physiker (Hammer sieht darin den Gauß-Freund Wilhelm Weber) stammt ([Ham23] S. 621).

C.1.3. Messung: Zahlenwert und Einheit

Die quantitative Aussage einer Messung beruht darauf, dass die betrachtete Größe mit einer prinzipiell willkürlich festgelegten Einheit („Maßstab“) verglichen wird. Man erhält dabei einen Zahlenwert, der angibt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Zu jeder physikalischen Größe gehören daher Zahlenwert und Einheit. Man kann schreiben²

$$\begin{aligned} \text{Messwert} &= \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit} \\ x &= \{x\} \cdot [x] \end{aligned}$$

$$\text{Beispiel: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum} = 299792458 \cdot \text{Meter/Sekunde}$$

Wesentlich beim Messvorgang sind also:

- Die Wahl einer Einheit.
- Der quantitative Vergleich der fraglichen Größe mit dieser Einheit.

Prinzipiell kann jede Naturwissenschaftlerin und jeder Naturwissenschaftler sich den Standard frei wählen. Sie können den Durchmesser einer CD also z. B. in Vielfachen der Breite Ihres eigenen Daumens ausdrücken. Auf diese Weise haben Sie eine ganz individuelle Einheit festgelegt. Um die Ergebnisse aber mit Kolleginnen und Kollegen teilen zu können, ist eine gemeinsame Regelung nötig, denn sonst müssten Sie Ihren Daumen für alle Längenmessungen zur Verfügung stellen, was sicher reichlich unpraktisch wäre. . .

Gute Standards zeichnen sich dadurch aus, dass sie bei vertretbarem technischen Aufwand möglichst gut reproduzierbar sind. Internationale Vereinbarungen stellen sicher, dass Angaben weltweit verständlich und eindeutig sind. So werden heute (nicht nur) in den Naturwissenschaften fast ausschließlich die Einheiten des sog. internationalen Einheitensystems („SI“) verwendet.³

C.1.4. Schätzen

Auch ohne äußere Hilfsmittel kann man Aussagen über physikalische Größen treffen, indem man Unbekanntes mit Bekanntem vergleicht. Man bezeichnet diese Vorgehensweise üblicherweise als „Schätzen“. Dabei nutzt man das im Laufe des Lebens erworbene

²Die Notation mit geschweiften Klammern für „der Zahlenwert von“ und eckigen Klammern für „die Einheit von“ ist international gebräuchlich. Man findet sie z. B. in der Norm DIN EN ISO 80000-1:2013-08.

Nach dieser Norm gilt weiterhin: der Zahlenwert einer Größe in Bezug auf eine bestimmte Einheit kann durch Hinzufügen der Einheit als Index an die geschweifte Klammer notiert werden, also z. B. bei einer Wellenlänge $\{\lambda\}_{\text{nm}}$. Vorzuziehen ist in solchen Fällen aber die Schreibweise als Verhältnis zwischen der Größe und der Einheit, also $\frac{\lambda}{\text{nm}}$.

³Die Verwendung von SI-Einheiten hat viele Vorteile. Neben der internationalen Verständlichkeit erleichtert die Nutzung des SI auch das Rechnen mit Einheiten. Beschränkt man sich nämlich noch etwas weiter und verwendet ausschließlich sog. kohärente SI-Einheiten, die sich ausschließlich aus den sieben SI-Basiseinheiten (m, kg, s, A, K, mol, cd) zusammensetzen, ohne dass weitere Vorsilben verwendet werden, so ergeben deren Kombinationen stets neue kohärente SI-Einheiten, z. B. $1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$. Umrechnungsfaktoren werden dabei nicht benötigt.

Wissen, um Einheiten festzulegen (z. B. die eigene Körpergröße) und die Eigenschaften physikalischer Objekte mit ihnen zu vergleichen. „Schätzen“ bedeutet also nicht einfach „Raten“! Typische Aussagen beim Schätzen enthalten Formulierungen wie „ist ungefähr“, „ist sicher größer als“, „ist sicher kleiner als“. Das Ergebnis ist also eher ein Intervall als ein Zahlenwert. Die Breite des Intervalls gibt dabei an, wie sicher man sich bei seiner Schätzung ist.

Die Übergänge zwischen „Schätzen“ und „Messen“ sind fließend. Im obigen Beispiel ist die Nutzung der Daumenbreite als Einheit zur Angabe von Längen kein äußeres Hilfsmittel im engeren Sinne und die Zuverlässigkeit ist offensichtlich begrenzt. In diesem Sinne würde man vermutlich eher von „Schätzen“ sprechen. Allerdings ist die Verwendung der persönlichen Daumenbreite (und nicht etwa einer allgemeinen „Fingerbreite“) bereits ein Schritt hin zu einer gewissen Reproduzierbarkeit der ermittelten Maßzahl. Dies ist ein wesentliches Merkmal einer Messung. Auch die teuersten Messgeräte vergleichen letztlich nur eine Größe mit einer Einheit.

C.1.5. Darstellung von Messwerten

C.1.5.1. Punkt auf der Zahlengeraden

Das Ergebnis einer Einzelmessung kann grafisch vereinfacht als Punkt auf einer Zahlengeraden dargestellt werden, indem man sich zunächst auf die Verwendung einer bestimmten Einheit festlegt und dann eine Markierung an die Stelle setzt, die dem ermittelten Zahlenwert entspricht (Abbildung C.1.1). Eine Angabe, wie sicher man sich ist, fehlt hier völlig. Um eine solche Angabe machen zu können, muss man sich ein Verfahren überlegen, wie das zugehörige Intervall festzulegen ist.

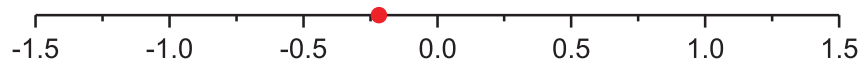


Abbildung C.1.1.: Darstellung des Ergebnisses einer Einzelmessung als Punkt auf der Zahlengeraden.

Eine gute Möglichkeit, Informationen über das Intervall zu erhalten, ist das mehrfache Wiederholen der Messung. Alle Messwerte werden auf die gleiche Weise dargestellt, indem weitere Punkte auf der Zahlengeraden gesetzt werden (Abbildung C.1.2). Dabei muss jeweils die gleiche Einheit verwendet werden.



Abbildung C.1.2.: Darstellung der Ergebnisse mehrerer Einzelmessungen als Punkte auf der Zahlengeraden.

C.1.5.2. Intervall auf der Zahlengeraden

In der Regel werden die Markierungen für mehrfach wiederholte Einzelmessungen über ein Intervall auf der Zahlengeraden streuen. Man kann nun dieses Intervall an Stelle eines Zahlenwerts verwenden, um die Mehrfachmessung zusammenzufassen und auch die Unsicherheit bei der Angabe des Gesamtergebnisses mit auszudrücken (Abbildung C.1.3). Die Breite des Intervalls kann dabei von sehr vielen Faktoren abhängen. Es ist nicht unbedingt immer sinnvoll, das Intervall so festzulegen, dass wirklich alle erhaltenen Messwerte in ihm enthalten sind. An dieser Stelle ist eine detailliertere Betrachtung notwendig.



Abbildung C.1.3.: Intervall auf der Zahlengeraden.

C.1.5.3. Histogramm

Für diese detailliertere Betrachtung wählen wir eine Darstellung in Form eines sog. Histogramms. Dabei wird die Zahlengerade in kleinere Intervalle (sog. Klassen) eingeteilt, und es wird für jede dieser Klassen die zugehörige Anzahl der Einzelmessungen ermittelt, deren Zahlenwerte in die entsprechende Klasse fallen. Anschließend wird diese Häufigkeit grafisch als senkrechte Balken dargestellt. Abbildung C.1.4 zeigt ein Beispiel.

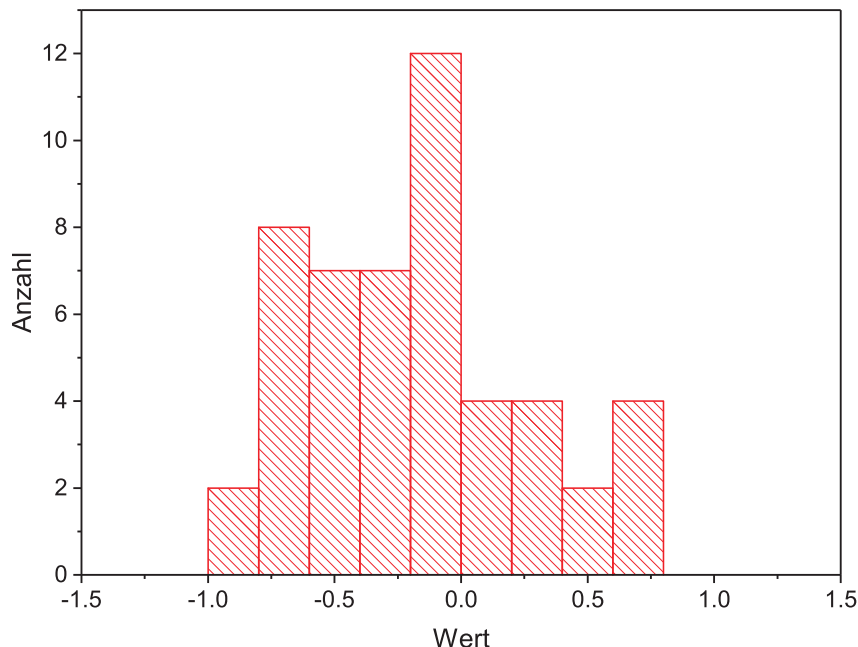


Abbildung C.1.4.: Beispiel für ein Histogramm.

Das Histogramm zeigt also die Häufigkeitsverteilung der Zahlenwerte der Einzelmessungen auf der Zahlengeraden.

C.1.5.4. BERNOULLI-Experiment und Binomialverteilung

Verteilungsfunktionen kennen Sie sicher bereits aus einem anderen Zusammenhang, z. B. die Binomialverteilung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen heißt BERNOULLI-Experiment. Ein Beispiel ist das Werfen einer (idealen) Münze. Führt man solch ein Experiment mehrfach hintereinander aus, so spricht man von einem mehrstufigen Zufallsexperiment. Ein Beispiel ist das fünfmalige Werfen einer Münze.

Betrachten wir nun ein solches Zufallsexperiment mit n Schritten, wobei es in jedem Schritt nur zwei mögliche Ausgänge („Erfolg“, „kein Erfolg“) gibt und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines „Erfolgs“ in jedem Einzelschritt p (von *(engl.) probability*) beträgt ($0 \leq p \leq 1$). Die Gesamtwahrscheinlichkeit P für das Auftreten von k Erfolgen bei n Versuchen ist dann gegeben durch die sog. Binomialverteilung

$$P(k \text{ Erfolge bei } n \text{ Versuchen}) = B_{n,p}(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{C.1.1})$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{C.1.2})$$

mit

n = Zahl der Versuche bzw. Schritte,
 k = Zahl der Erfolge,
 p = Erfolgswahrscheinlichkeit
bei einem einzelnen Schritt.

Dabei steht $n!$ für die sog. Fakultät der natürlichen Zahl n , $\binom{n}{k}$ für den sog. Binomialkoeffizienten (Sprechweise deutsch: „ n über k “, Sprechweise *(engl.)*: „ n choose k “).⁴

⁴Bemerkungen:

- Weniger gebräuchliche deutsche Sprechweisen sind „ k aus n “ oder „ n tief k “.
- Auf Taschenrechnern findet man häufig die aus dem Englischen abgeleitete Abkürzung nCr („ n choose r “) für die Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Elementen ohne Zurücklegen r Elemente auszuwählen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt (z. B. beim Lotto $r = 6$ aus $n = 49$ Kugeln). Die mit nCr verwandte Funktion nPr („ n permute r “) unterscheidet sich nur dadurch, dass bei nPr die Reihenfolge eine Rolle spielt. Da es $r!$ Permutationen von r Elementen gibt, gilt also $nPr(n,r) = nCr(n,r) \cdot r!$.
- Bitte nicht verwechseln: der englische Ausdruck „ n over k “ würde den Quotienten $\frac{n}{k}$ bedeuten, auf deutsch also „ n geteilt durch k “.
- Zu diesen Schreibweisen siehe auch Abschnitt E auf Seite 795, insbesondere die Gleichungen (E.1.7) bis (E.1.34). Dort sind auch Näherungsformeln für die Berechnung der Fakultät für große Zahlen angegeben.

Der Erwartungswert der Erfolge (d. h. die mittlere Anzahl der Erfolge nach vielen Reihen von jeweils n Versuchen) ist

$$\bar{k} = n \cdot p \quad . \quad (\text{C.1.3})$$

— Ende Teil 1 —

C.1.5.5. „Kenngrößen“ von Verteilungen

Das Histogramm enthält die gesamte Information über die Verteilung der erhaltenen Messwerte und ist perfekt geeignet, das Ergebnis einer wiederholten Messung (einer „Messreihe“) wiederzugeben. Allerdings ist es relativ unpraktisch, als Ergebnis immer gleich ein ganzes Diagramm darstellen zu müssen.

Handlicher ist es, eine begrenzte Anzahl geeigneter Kenngrößen aus einem Histogramm abzuleiten, die die wesentlichen Informationen beinhalten. Mindestens erforderlich sind dazu der „typische Wert“ der Verteilung und dessen „typische Unsicherheit“.

Der „typische“ (und somit in gewisser Weise zur Charakterisierung beste) Wert einer Verteilung von Messwerten wird i. d. R. durch den arithmetischen Mittelwert berechnet:

$$\begin{aligned}\bar{x} &:= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}\quad (\text{C.1.4})$$

Es werden also alle Messwerte addiert und dann durch die Anzahl der Messwerte geteilt. Bei unendlich vielen Messwerten liefert dieses Verfahren den sog. Erwartungswert. Für eine endliche Zahl von Messwerten den „besten“ Schätzwert hierfür.

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Unsicherheit bei der Angabe dieses typischen Werts ist etwas weniger offensichtlich. In einem ersten Schritt berechnet man ein Maß für die Breite der Verteilung, indem man die Abweichung aller Einzelmessungen vom Mittelwert „quadratisch mittelt“. Man definiert als

$$\begin{aligned}\sigma_x &:= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(n - 1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\end{aligned}\quad (\text{C.1.5})$$

die sog. empirische Standardabweichung der Stichprobe. Wie man leicht sieht, ist ihr Wert immer positiv und wird größer, je stärker die Messwerte vom Mittelwert abweichen.⁵

In einem zweiten Schritt berechnet man aus dieser empirischen Standardabweichung der Stichprobe σ_x die sog. empirische Standardabweichung des Mittelwerts

$$\sigma_{\bar{x}} := \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad . \quad (\text{C.1.6})$$

Dieser Wert ist ein gutes Maß für die Unsicherheit bei der Angabe des Mittelwerts und wird als sog. Standardunsicherheit verwendet.⁶

⁵Warum hier im Nenner statt n der Ausdruck $(n - 1)$ steht, werden wir später begründen.

⁶Die beiden Begriffe sind nicht ganz bedeutungsgleich. Die Bezeichnung „Standardunsicherheit“ wird auch in Fällen verwendet, in denen die Festlegung auf eine andere Art und Weise durchgeführt wird. Eine Definition der Begriffe „empirische Standardabweichung“, „empirische Standardabweichung des

Statt eines Histogramms beschränkt man sich meist auf die Angabe von $x := \bar{x}$ und $u(x) := \sigma_{\bar{x}}$, die dann gemeinsam als das Endergebnis der Messreihe betrachtet werden. Teilweise werden zusätzlich auch noch n und/oder σ_x angegeben.

Unweigerlich geht bei diesem Zusammenfassen der Daten Information verloren. Das Ergebnis ist aber dafür viel „handlicher“. Es handelt sich also um einen typischen Kompromiss.⁷

C.1.5.6. Vorteil der Mehrfachmessung

Ein wichtiger Aspekt zeigt sich in Gleichung (C.1.6): Die Unsicherheit $\sigma_{\bar{x}}$ des Mittelwerts wird kleiner, wenn die Zahl n der Einzelmessungen ansteigt. Dies ist ein wesentliches Argument für die übliche Vorgehensweise, Messungen nicht nur einmal sondern wiederholt durchzuführen.

C.1.5.7. Signifikante Stellen

Bei der Angabe von Ergebnissen muss die Unsicherheit in geeigneter Weise berücksichtigt werden. So ist es z. B. nicht sinnvoll, einen Messwert mit einer beliebig großen Zahl von Ziffern anzugeben (siehe Zitat von Wilhelm WEBER auf Seite 749 am Anfang des Kapitels). Den Benzinverbrauch eines Kraftfahrzeugs mit 7.4958451 L/100 km anzugeben wäre offensichtlich genauso unsinnig wie die Länge einer Schaumstoffmatratze mit 1.9762587 m. Für die „richtige“ Ziffernzahl gibt es keine allgemein gültigen strengen Vorschriften. Folgende Regeln haben sich aber in der Forschungspraxis bewährt und sollen daher auch im Praktikum angewendet werden:

- Angabe der Unsicherheit des Ergebnisses mit zwei geltenden Ziffern (man zählt von links ab der ersten von null verschiedenen Ziffer).

Beispiel: $u(x) = 0.0\mathbf{33}$ m

- Angabe des Messwertes mit so vielen Ziffern, dass die Wertigkeit der letzten Ziffern von Messwert und Unsicherheit übereinstimmt (auch wenn dadurch eine oder mehrere Nullen am Ende geschrieben werden müssen).

Beispiele:

– $x = 3.5\mathbf{12}$ m

– $x = 1.4\mathbf{10}$ m

– $x = 7.0\mathbf{00}$ m

Mittelwerts“ und „Standardunsicherheit“ findet sich z. B. in [fNB99] auf S. 15 ff. Die Verwendung der Begriffe ist in der Literatur leider nicht einheitlich. Manchmal wird der Zusatz „empirisch“ weggelassen, manchmal der Zusatz „der Stichprobe“ weggelassen oder durch den Zusatz „der Messreihe“ ersetzt. Wichtig ist, dass die Begriffe unzweideutig und konsistent verwendet werden.

⁷Man kann die Vorgehensweise als verlustbehaftete Datenkompression betrachten, ein bisschen so wie beim Erstellen von mp3-Dateien für Musik oder jpg-Dateien für Bilder. Diese geben auch nicht alle Details wieder, sind dafür aber wesentlich platzsparender als „Rohdaten“.

- Angabe von Zwischenergebnissen bei längeren Rechnungen jeweils mit mindestens einer Ziffer mehr (also drei oder mehr Ziffern bei der Unsicherheit), um dem Ansammeln von Rundungsfehlern entgegenzuwirken.

Beispiel: $x = 3.5123$ m mit $u(x) = 0.0333$ m

C.1.5.8. Runden von Zahlen

Die (zumindest in Deutschland) verbreitetste Regel zum Runden von Dezimalzahlen ist das sog. kaufmännische Runden, umgangssprachlich auch als „4-5-Rundung“ bezeichnet.⁸ Beim kaufmännischen Runden gelten folgende Regeln:

1. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird (betragsmäßig) abgerundet.

Beispiele:

- $3.14159265 \dots \rightarrow 3.14159$
- $3.14159265 \dots \rightarrow 3.14$
- $3.14159265 \dots \rightarrow 3$

2. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird (betragsmäßig) aufgerundet. Beispiele:

- $3.14159265 \dots \rightarrow 3.1415927$

⁸Etwas erweiterte Regeln gelten für das wissenschaftliche Runden[BS85], das auch als mathematisches, geodätisches, unverzerrtes oder symmetrisches Runden bezeichnet wird. Der Unterschied zum sog. kaufmännischen Runden besteht nur in der besonderen Behandlung der Ziffer 5 und spielt in der Praxis kaum eine Rolle.

1. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird (betragsmäßig) abgerundet.

2. a) Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 5 (gefolgt von weiteren Ziffern, die nicht alle null sind), 6, 7, 8 oder eine 9, so wird (betragsmäßig) aufgerundet.

Beispiele:

- $3.141592653589793 \dots \rightarrow 3.142$
- $3.141592653589793 \dots \rightarrow 3.1415927$
- $3.141592653589793 \dots \rightarrow 3.141592654$
- $3.14159265358979323846264338327950288 \dots \rightarrow 3.141592653589793238462643383280$

- b) Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer lediglich eine 5 (oder eine 5, auf die nur Nullen folgen), so wird derart gerundet, dass die letzte beizubehaltende Ziffer gerade wird.

Beispiele:

- $3.14159265 \rightarrow 3.1415926$
- $3.14159265000 \rightarrow 3.1415926$
- $3.1415 \rightarrow 3.142$
- $3.1415000 \rightarrow 3.142$

3. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 6, 7, 8 oder 9, so wird (betragsmäßig) aufgerundet.

Diese Art der Rundung ist in internationalen Normen (z. B. IEEE 754) standardmäßig vorgesehen und daher oft auch in Computerprogrammen implementiert.

- 3.14159265... → 3.1416
- 3.14159265... → 3.142

Hinweis: Wird die Rundung schrittweise durchgeführt, so kann es u. U. zu falschen Ergebnissen kommen. Nach Möglichkeit muss daher bei jeder Rundung wieder auf den ursprünglichen Zahlenwert zurückgegriffen werden.

Falsch wäre z. B. ein Runden in dieser Form: 1.374532... → 1.375 → 1.38.

Richtig muss hier wie folgt gerundet werden: 1.374532... → 1.37.

C.1.6. Schreibweisen für Unsicherheiten

Es gibt verschiedene Schreibweisen zur Angabe von Unsicherheiten bei Messwerten. Der Übersichtlichkeit halber soll im Physikalischen Anfängerpraktikum eine der in Tabelle C.1.1 angegebenen Schreibweisen verwendet werden.

Die Unsicherheiten werden dabei als (immer positive) „absolute Unsicherheiten“ $u(x)$ möglichst mit der gleichen Einheit⁹ wie der zugehörige Wert x angegeben.

C.1.7. Einfaches Verfahren zur statistischen Ermittlung von Bestwert und Messunsicherheit

Angenommen, Sie haben eine Größe insgesamt n mal gemessen und dabei die Messwerte x_1, \dots, x_n erhalten. Unter der Annahme, dass alle dabei auftretenden Abweichungen zufälliger Natur sind, sollen Sie nun ein „Endergebnis“ berechnen. Sie können dazu in vielen Fällen folgendes Verfahren anwenden:

1. Bestimmung des besten Wertes für x durch Berechnung des arithmetischen Mittelwertes \bar{x} nach

$$x := \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad . \quad (\text{C.1.7})$$

2. Bestimmung des besten Wertes σ_x für die Breite der Verteilung durch Berechnung der empirischen Standardabweichung nach

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad . \quad (\text{C.1.8})$$

3. Berechnung der Standardunsicherheit $u(x)$ als Standardabweichung des Mittelwertes $\sigma_{\bar{x}}$ nach

$$u(x) := \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad . \quad (\text{C.1.9})$$

⁹Auf jeden Fall mit der gleichen Dimension, also z. B. Dimension einer Länge, Masse, Geschwindigkeit, usw.

¹⁰Sofern die Ziffern der Unsicherheit das Dezimaltrennzeichen umschließen, wird dieses auch innerhalb der Klammer geschrieben, also z. B. $U = 12.0(1.8) \text{ V}$.

Nr.	Form	Beispiel 1	Beispiel 2	Kommentar
1	$\{x\}(\{u(x)\})[x]$ führende Nullen der Unsicherheit werden <u>nicht</u> geschrieben	2.000(50) m	7.985(42) kg	sehr kompakt, häufig in wis- senschaftlichen Veröffentlichun- gen
2	$x \pm u(x)$	2.000 m \pm 0.050 m	7.985 kg \pm 0.042 kg	
3		(2.000 \pm 0.050) m	(7.985 \pm 0.042) kg	
4		2.000 m \pm 5.0 cm	7.985 kg \pm 42 g	sehr häufig auch im Alltag

Tabelle C.1.1.: Verschiedene übliche Schreibweisen zur Angabe von Messergebnissen einschließlich der zugehörigen Messunsicherheiten. Die Schreibweise 1 wird in internationalen Normen wie der DIN EN ISO 80000-1:2013-08 empfohlen. Bitte beachten Sie dabei: die eingeklammerten Ziffern sind keineswegs weitere Dezimalstellen, deren Gültigkeit möglicherweise irgendwie eingeschränkt ist, sondern sie stellen die Messunsicherheit selbst als Absolutwert dar. Die Wertigkeit der letzten Ziffer vor der Klammer entspricht dabei der Wertigkeit der letzten Ziffer in der Klammer.¹⁰

Nicht signifikante Nullen am Ende sollen vermieden werden. Dies kann durch die Wahl einer geeigneten Einheit erfolgen und/oder durch die Verwendung der Exponentialschreibweise („wissenschaftliche Schreibweise“) für den Zahlenwert.

Ausführliche Erläuterungen zu den Schreibweisen finden sich u. a. in [fNB95].

4. Runden von $u(x)$ auf typischerweise *zwei geltende Ziffern*.
5. Runden von x auf die gleiche *Dezimalstelle* wie $u(x)$.¹¹
6. Angabe der *gerundeten* Werte x und $u(x)$ (Schreibweisen siehe Tabelle C.1.1).

Hierbei kann es sinnvoll sein, zur Vermeidung nicht signifikanter Nullen am Ende eine passendere Einheit zu wählen und/oder die Exponentialschreibweise („wissenschaftliche Schreibweise“) für den Zahlenwert anzuwenden, bei der die Zahl als Produkt aus einer Mantisse a (mit $1 \leq a < 10$) und einer Zehnerpotenz dargestellt wird, also z. B. $1013.25 \text{ hPa} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

¹¹Das bedeutet normalerweise *nicht* „gleiche Zahl von Ziffern“! Wichtig ist, dass die „Wertigkeit“ der jeweils letzten Ziffer gleich ist.

C.1.8. Nomenklatur nach GUM

Seit 1993 gibt es internationale Empfehlungen zum Umgang mit Messunsicherheiten, nämlich den „Guide to the expression of uncertainty in mesaurement (GUM)“ [fGiMJ10] und seine deutsche Übersetzung „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ [Bun11, fNB99]. Der vorliegende Text folgt weitgehend diesen Empfehlungen.

Die hier dargestellte Ermittlung einer Messunsicherheit durch statistische Auswertung der Einzelmessungen ist eine der nach GUM empfohlenen Vorgehensweisen. Die ermittelte Unsicherheit wird dann als Unsicherheit vom „Typ A“ bezeichnet. Alle nach anderen Vorgehensweisen ermittelten Unsicherheiten werden als „Typ B“ bezeichnet. Diese Bezeichnungen stellen keine Wertung dar. Wir werden später auch Typ B noch ausführlicher betrachten.

C.1.8.1. Kenngrößen der Binomialverteilung

Betrachten wir als Beispiel die Kenngrößen der Binomialverteilung (siehe Gleichung (C.1.1)). Der Erwartungswert der Erfolge (d. h. die mittlere Anzahl der Erfolge nach vielen Reihen von jeweils n Versuchen) ist

$$\bar{k} = n \cdot p \quad , \quad (\text{C.1.10})$$

die zugehörige Standardabweichung ist

$$\sigma_k = \sqrt{np(1-p)} \quad . \quad (\text{C.1.11})$$

Da keine wiederholte Messung mit einer endlichen Anzahl von Einzelmesswerten vorliegt, sondern die gesamte Binomialverteilung exakt bekannt ist, ist hier weder die Berechnung der *empirischen* Standardabweichung noch der *empirischen* Standardunsicherheit des Mittelwerts sinnvoll.

In der Experimentalphysik ist die Binomialverteilung selbst zwar nicht von allzu großer praktischer Bedeutung, sie ist aber quasi die „Mutter aller Verteilungen“. Aus ihr folgen die POISSON-¹² und die überaus wichtige GAUSS-Verteilung als Näherungen.¹³

C.1.8.2. Die GAUSS-Verteilung (auch Standard- oder Normalverteilung)

Die GAUSSverteilung¹⁴ ist gegeben durch

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad (\text{C.1.12})$$

wobei

¹²wird im Rahmen der AP-Einführung in zwei Wochen behandelt

¹³Für die GAUSS-Verteilung findet sich der Beweis hierzu z. B. in [Tay88] S. 175 f.

¹⁴Mathematisch exakt handelt es sich bei G um die Wahrscheinlichkeitsdichte der GAUSSverteilung. Zumindest in der Physik hat es sich aber eingebürgert, G selbst etwas verkürzt als GAUSSverteilung zu bezeichnen.

μ = Zentralwert der Verteilung¹⁵

σ = Standardabweichung der Verteilung
= „Breite der Verteilung“

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert x in höchstens t Standardabweichungen σ vom Zentralwert μ liegt, d. h. dass gilt $(\mu - t\sigma) \leq x \leq (\mu + t\sigma)$, ist

$$\begin{aligned} P(\text{innerhalb } t\sigma) &= \int_{\mu-t\sigma}^{\mu+t\sigma} G_{\mu,\sigma}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-t}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.1.13})$$

Insbesondere ist

$$P(\text{innerhalb } 1\sigma) \approx 68.27\%,$$

$$P(\text{innerhalb } 2\sigma) \approx 95.45\%,$$

$$P(\text{innerhalb } 3\sigma) \approx 99.73\%.$$

Auch wenn σ üblicherweise als „die Breite“ der GAUSS-Verteilung bezeichnet wird, bedeutet das also offensichtlich nicht, dass *alle* Messwerte innerhalb dieser Breite zu finden sind. Selbst wenn man ein doppelt oder dreimal so großes Intervall betrachtet, erreicht man durch den exponentiellen Ausdruck in Gleichung (C.1.8.2) nie 100%.

Das Integral in Gleichung (C.1.13) hängt zusammen mit der sog. „Fehlerfunktion“ $\text{erf}(t)$ (Schreibweise abgeleitet von \langle engl. \rangle *error function*)¹⁶

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad . \quad (\text{C.1.14})$$

über

$$P(\text{innerhalb } t\sigma) = \text{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{C.1.15})$$

An den Stellen $\mu \pm \sigma$ liegen die Wendepunkte der glockenförmigen GAUSSkurve (siehe Abbildung C.1.5). Der Funktionswert beträgt an diesen Stellen jeweils $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$, unterscheidet sich also um den Faktor $\frac{1}{e}$ vom Maximalwert $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ an der Stelle μ .

¹⁵Der Zentralwert einer Normalverteilung ist gleichzeitig ihr Erwartungswert.

¹⁶Leider werden in diesem Zusammenhang die Begriffe manchmal nicht ganz eindeutig definiert und verwendet. Insbesondere wurden sowohl der Ausdruck „Fehlerintegral“ als auch die Schreibweise $\text{erf}(t)$ von verschiedenen Autoren in der Vergangenheit unterschiedlich verwendet. Dies ist historisch begründet. Die Namensgebung geht zurück auf J. W. L. GLAISHER, der als Erster diese Bezeichnung für eine derartige Funktion verwendete (allerdings damals noch mit der Schreibweise $\text{Erf}(x)$ und mit einer etwas anderen Definition) [Gla71a, Gla71b]. Inzwischen ist die Funktion aber international genormt (siehe z. B. DIN EN ISO 80000-2 – Achtung: Schreibfehler in der unteren Integrationsgrenze wird erst in der Auflage 2018 behoben).

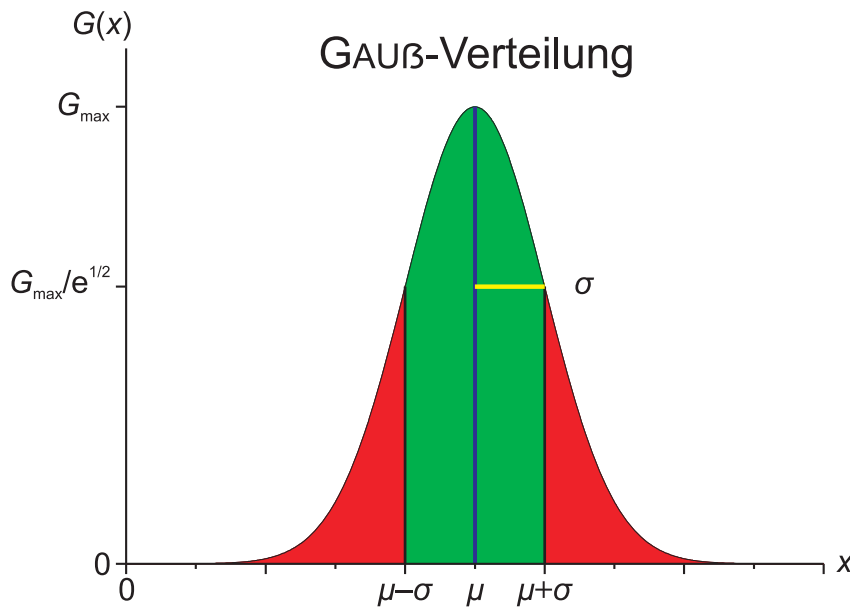


Abbildung C.1.5.: Die GAUSS-Verteilung (auch Standard- oder Normalverteilung).

C.1.9. Kombinierte Unsicherheiten

Bisher haben wir nur Unsicherheiten betrachtet, die mit der Bestimmung einer einzigen physikalischen Größe x zusammenhängen. Oft sind physikalische Größen aber nicht direkt messbar, sondern nur auf dem Umweg über die Messung anderer Größen, mit denen ein formelmäßiger Zusammenhang bekannt ist.¹⁷ Verknüpft man nun aber zwei oder mehrere Messergebnisse für gleiche oder verschiedene physikalische Größen (die jeweils wieder aus mehreren Einzelmessungen berechnet sein können) zu einer neuen physikalischen Größe, so führt die Unsicherheit in den Ausgangsgrößen dazu, dass auch die neu berechnete Größe eine gewisse Unsicherheit aufweist.

Die quantitative Bestimmung dieser Unsicherheit ist eine wichtige Aufgabe bei der Messunsicherheitsanalyse. Dabei soll der angegebene Wert weder eine zu große Genauigkeit vortäuschen, noch zu pessimistisch sein. Für die mit Hilfe der Statistik gefundene Lösung wird im GUM der Begriff „kombinierte Standardunsicherheit“ verwendet. Zur Berechnung ist es nötig, die Verteilungen der „Eingangsgrößen“ und der „Ausgangsgröße“ genauer zu betrachten.

— Ende Teil 2 —

¹⁷Manchmal ist es auch einfach nur praktischer, diesen Weg zu gehen, selbst wenn eine direkte Messung prinzipiell möglich wäre.

C.1.9.1. Signifikante Stellen – Begründung für die Wahl der Stellenzahl

Eine Begründung für die Wahl der Zahl signifikanter Ziffern ergibt sich aus statistischen Überlegungen. Wenn die Standardunsicherheit rechnerisch als empirische Standardabweichung des Mittelwerts aus einer endlichen Zahl von Einzelmessungen bestimmt wird, weist sie selbst eine Unsicherheit auf. Unter der Voraussetzung einer GAUSS-Verteilung kann man zeigen, dass gilt (siehe z. B. [Tay97]):

$$\frac{\sigma_{\sigma_x}}{\sigma_x} \approx \frac{\sigma_{\sigma_{\bar{x}}}}{\sigma_{\bar{x}}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \quad (\text{C.1.16})$$

Diese Unsicherheit ist also bei einer kleinen Zahl von Einzelmessungen besonders groß. Da (insbesondere im Praktikum) meist keine „riesigen“ Zahlen von Einzelmessungen vorliegen, kann man die „Unsicherheit der Unsicherheit“ abschätzen:

Zahl der Einzelmessungen	prozentuale Unsicherheit der Unsicherheit
3	50 %
10	24 %
50	10 %
100	7 %
1000	2 %

Tabelle C.1.2.: Unsicherheit der Unsicherheit berechnet nach der Näherungsformel

Bei der Angabe der Unsicherheit soll weder durch zu viele Stellen eine zu große Genauigkeit vorgetäuscht werden, noch durch die Angabe von zu wenigen Stellen eine zu große Unsicherheit signalisiert werden.

Betrachtet man nun die Änderungen, die beim Runden der Unsicherheit auf 1, 2 oder 3 Ziffern auftreten, so erhält man:

- 1 Ziffer: mögliche Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Beim Runden der Unsicherheit auf eine Ziffer ergibt sich die größte relative Änderung, wenn „1.4999...“ auf „1“ abgerundet wird. Sie beträgt $\frac{1.4999...-1}{1.4999...} \approx 33\%$. Ein so großer Rundungsfehler ist selbst bei nur 10 Messwerten nicht akzeptabel. Die Schrittweite bei der Verwendung nur einer Ziffer ist also ggf. zu groß.¹⁸
- 2 Ziffern: mögliche Werte 10, 11, 12, 13, ..., 97, 98, 99
Beim Runden der Unsicherheit auf zwei Ziffern ergibt sich die größte relative Änderung, wenn „10.4999...“ auf „10“ abgerundet wird. Sie beträgt $\frac{10.4999...-10}{10.4999...} \approx 5\%$. Das ist in der Regel sinnvoll zur Angabe von Ergebnissen.

¹⁸Ist die erste Ziffer keine „1“, sondern z. B. eine „9“, so wird der Rundungsfehler wesentlich kleiner. Dann kann auch die Angabe nur einer Ziffer bereits ausreichend sein. Diese Fallunterscheidung soll hier aber aus Gründen der einfachen Handhabung nicht weiter verfolgt werden.

- 3 Ziffern: mögliche Werte 100, 101, 102, 103, ..., 997, 998, 999

Beim Runden der Unsicherheit auf drei Ziffern ergibt sich die größte relative Änderung, wenn „100.4999...“ auf „100“ abgerundet wird. Sie beträgt $\frac{100.4999...-100}{100.4999...} \approx 0.5\%$. Das sind zwar recht kleine Schritte, aber das ist für Zwischenergebnisse in vielen Fällen gerade angemessen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die schon in Abschnitt C.1.5.7 auf Seite 756 formulierte Faustregel, dass Endergebnisse mit zwei signifikanten Ziffern der Unsicherheit angegeben werden, Zwischenergebnisse mit mindestens einer Ziffer mehr.¹⁹

C.1.10. Kombinierte Unsicherheiten, Empfindlichkeitskoeffizienten

C.1.10.1. Funktionen einer Variable

Bildet man aus einer Größe a mit Hilfe der Funktion f eine neue Größe $z = f(a)$, so lassen sich die Kenngrößen der Verteilung der Größe z aus den Kenngrößen der Verteilungen der Größe a berechnen. Ein Beispiel wäre das Füllvolumen einer beliebig geformten Vase als Funktion ihrer Füllhöhe.

Der Wert von z ergibt sich dabei einfach als der Funktionswert. Zur Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(z)$ bildet man die Ableitung $\frac{dz}{da}$. Betrachtet man die Steigungsdreiecke in Abbildung C.1.6, so wird klar, dass gilt:

$$u_c(z) = \frac{dz}{da} \cdot u(a) \quad . \quad (\text{C.1.17})$$

Zur zahlenmäßigen Berechnung muss noch der für die Größe a bestimmte „beste“ Wert a_0 in den Ableitungsausdruck eingesetzt werden. Man sagt dazu, die Ableitung wird an der Stelle a_0 ausgewertet. Der erhaltene Ableitungswert $\frac{dz}{da}(a_0)$ wird auch als Empfindlichkeitskoeffizient von z bezüglich a bezeichnet, weil er angibt, wie „empfindlich“ z auf Änderungen von a reagiert.

¹⁹Feste verbindliche Regeln gibt es hierzu nicht. Im GUM findet sich in Abschnitt 7.2.6 folgende Formulierung [fNB99]: „Die Zahlenwerte des Schätzwerts y und seiner Standardunsicherheit $u_c(y)$ oder erweiterten Unsicherheit U dürfen nicht mit einer übermäßigen Stellenzahl angegeben werden. Es reicht gewöhnlich aus, $u_c(y)$ und U [ebenso wie die Standardunsicherheiten $u(x_i)$ der Eingangsgrößen x_i] auf höchstens zwei Stellen anzugeben, obwohl es in manchen Fällen notwendig sein kann, weitere Stellen beizubehalten, um bei nachfolgenden Berechnungen Rundungsabweichungen zu vermeiden.“ Das Wort „gewöhnlich“ lässt dabei einen gewissen Spielraum.

Referenzwerte für grundlegende physikalische Konstanten werden fast immer mit zwei signifikanten Ziffern angegeben, siehe z. B. [COD15]. Einschlägige Software wie z. B. **GUM Workbench** verwendet bei der Angabe von Unsicherheiten von Ergebnissen i. d. R. ebenfalls zwei signifikante Ziffern, bei Zwischenergebnissen eine Ziffer mehr.

Man sollte aber nie vergessen, dass es sich bei der Formulierung in Abschnitt C.1.5.7 auf Seite 756 nur um eine Faustregel handelt. Die entscheidende Frage ist und bleibt, welche Ziffernzahl der ermittelten Unsicherheit des Ergebnisses angemessen ist. Diese Frage muss ggf. für den Einzelfall entschieden werden.

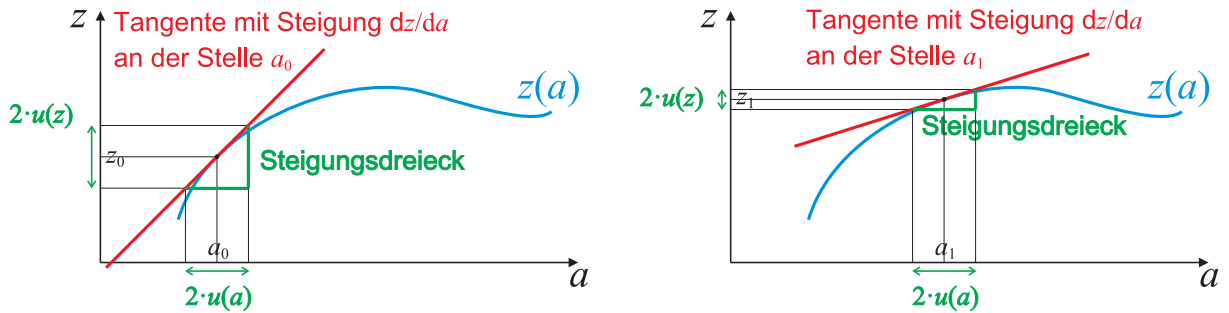


Abbildung C.1.6.: Zur Erklärung der Nutzung der Ableitung bei der Berechnung der kombinierten Messunsicherheit über die Tangente an die Funktion. Gezeichnet sind die Tangenten und Steigungsdreiecke an den beiden Stellen a_0 (linkes Diagramm) und a_1 (rechtes Diagramm).

C.1.10.1.1. Beispiel Kugelvolumen

Betrachten wir das Volumen einer Kugel. Die Masse lässt sich dann berechnen als

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \quad .$$

Die Ableitung lautet

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi \cdot r^2$$

und für die kombinierte Unsicherheit ergibt sich somit

$$\begin{aligned} u_c(V) &= \frac{dV}{dr} \cdot u(r) \\ &= 4\pi r^2 \cdot u(r) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.1.18})$$

C.1.10.2. Funktionen mehrerer Variablen

Die gerade für Funktionen einer Variable beschriebene Vorgehensweise lässt sich auf Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinern.

Bildet man aus den Größen a, b, c, \dots eine neue Größe $z = f(a, b, c, \dots)$, so lassen sich die Kenngrößen der Verteilung der Größe z aus den Kenngrößen der Verteilungen der Größen a, b, c, \dots berechnen. Der Wert von z ergibt sich dabei einfach als der Funktionswert. Für die Standardunsicherheit gilt das sog. Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz:

Ist die Größe

$$z(a, b, c, \dots)$$

eine beliebige Funktion mehrerer unabhängiger Größen

$$a, b, c, \dots$$

mit den zugehörigen Standardunsicherheiten

$$u(a), u(b), u(c), \dots \quad ,$$

so ist die kombinierte Standardunsicherheit von z

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c} \cdot u(c)\right)^2 + \dots} \quad . \quad (\text{C.1.19})$$

Das Symbol $\frac{\partial z}{\partial a}$ bedeutet dabei die partielle Ableitung der Funktion f nach der Variablen a . Sie beschreibt die Steigung der Funktion $z(a, b, c, \dots)$ in Richtung der Variable a bei unveränderten Werten der anderen Variablen b, c, \dots . Zur Bildung der partiellen Ableitung nach einer bestimmten Variable betrachtet man also alle anderen Variablen als Konstanten. Es ist daher nicht schwieriger, eine partielle Ableitung zu bilden, als eine „normale“ Ableitung. Die partiellen Ableitungen werden jeweils an der Stelle (a_0, b_0, c_0, \dots) ausgewertet²⁰, wobei a_0, b_0, c_0, \dots die für die Größen a, b, c, \dots bestimmten „besten“ Werte sind. Der erhaltene Ableitungswert $\frac{\partial z}{\partial a}(a_0, b_0, c_0, \dots)$ wird auch als Empfindlichkeitskoeffizient von z bezüglich a bezeichnet, weil er angibt, wie „empfindlich“ z auf Änderungen von a reagiert, während die anderen Variablen konstant bleiben.²¹ Abbildung C.1.7 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

C.1.10.2.1. Beispiel Quadermasse

Betrachten wir die Masse eines homogenen Quaders mit den Kantenlängen a, b und c sowie der Dichte ρ . Die Masse lässt sich dann berechnen als

$$m(a, b, c, \rho) = a \cdot b \cdot c \cdot \rho \quad .$$

Die partiellen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial a} &= b \cdot c \cdot \rho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial b} &= a \cdot c \cdot \rho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial c} &= a \cdot b \cdot \rho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial \rho} &= a \cdot b \cdot c \quad . \end{aligned}$$

²⁰Das heißt, dass diese Werte in den beim Ableiten erhaltenen Ausdruck eingesetzt werden.

²¹Für die anderen Größen gilt das entsprechend.

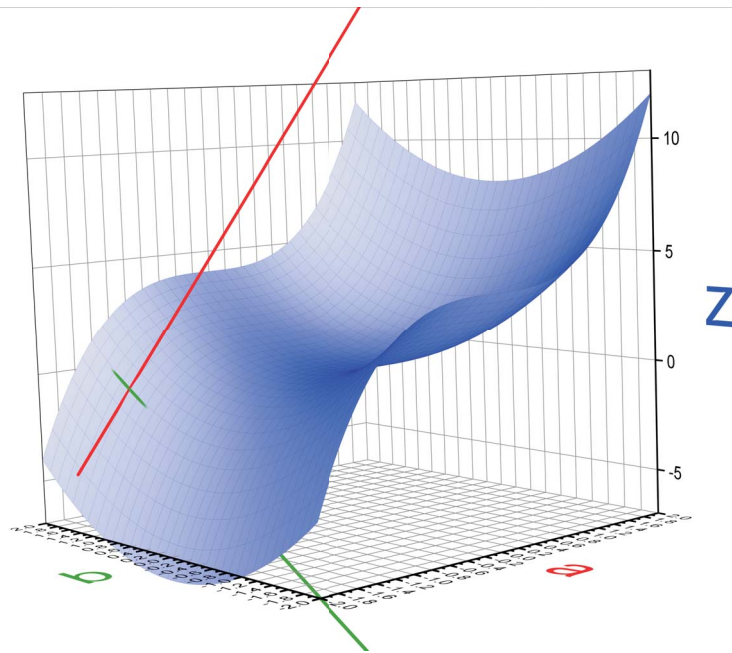


Abbildung C.1.7.: Zur Erklärung der Nutzung der partiellen Ableitung bei der Berechnung der kombinierten Messunsicherheit über die Tangente an eine mehrdimensionale Funktion.

Für die kombinierte Unsicherheit ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 u_c(m) &= \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial c} \cdot u(c)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial \rho} \cdot u(\rho)\right)^2} \\
 &= \sqrt{(bc\rho \cdot u(a))^2 + (ac\rho \cdot u(b))^2 + (ab\rho \cdot u(c))^2 + (abc \cdot u(\rho))^2} \quad .
 \end{aligned}$$

Ein Zahlenbeispiel für einen Goldquader:

Für

$$\begin{aligned}
 a &= 0.08500 \text{ m} \quad , \\
 u(a) &= 0.00030 \text{ m} \quad , \\
 b &= 0.03500 \text{ m} \quad , \\
 u(b) &= 0.00020 \text{ m} \quad , \\
 c &= 0.01800 \text{ m} \quad , \\
 u(c) &= 0.00010 \text{ m} \quad , \\
 \rho &= 19320 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad , \\
 u(\rho) &= 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}
 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 (u(m))^2 &= \left(0.03500 \text{ m} \cdot 0.01800 \text{ m} \cdot 19320 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.00030 \text{ m}\right)^2 \\
 &\quad + \left(0.08500 \text{ m} \cdot 0.01800 \text{ m} \cdot 19320 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.00020 \text{ m}\right)^2 \\
 &\quad + \left(0.08500 \text{ m} \cdot 0.03500 \text{ m} \cdot 19320 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.00010 \text{ m}\right)^2 \\
 &\quad + \left(0.08500 \text{ m} \cdot 0.03500 \text{ m} \cdot 0.01800 \text{ m} \cdot 20 \text{ m}\right)^2 \\
 &= 8.247 \cdot 10^{-5} \text{ kg}^2 \quad , \\
 u(m) &= \sqrt{8.247 \cdot 10^{-5} \text{ kg}^2} \\
 &= 0.0091 \text{ kg} \quad , \\
 m &= 0.08500 \text{ m} \cdot 0.03500 \text{ m} \cdot 0.01800 \text{ m} \cdot 19320 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 &= 1.0346 \text{ kg} \quad .
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet somit

$$m = 1.0346(91) \text{ kg} \quad .$$

C.1.10.2.2. Beispiel Zylindermasse

Betrachten wir die Masse eines homogenen Zylinders mit dem Radius r , der Höhe h und der Dichte ϱ . Die Masse lässt sich dann berechnen als

$$m(r, h, \varrho) = \pi r^2 \cdot h \cdot \varrho \quad .$$

Die partiellen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m}{\partial r} &= 2\pi r \cdot h \cdot \varrho \quad , \\
 \frac{\partial m}{\partial h} &= \pi r^2 \cdot \varrho \quad , \\
 \frac{\partial m}{\partial \varrho} &= \pi r^2 \cdot h \quad .
 \end{aligned}$$

Für die kombinierte Unsicherheit ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 u_c(m) &= \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial r} \cdot u(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial h} \cdot u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial \varrho} \cdot u(\varrho)\right)^2} \\
 &= \sqrt{(2\pi r h \varrho \cdot u(r))^2 + (\pi r^2 \varrho \cdot u(h))^2 + (\pi r^2 h \cdot u(\varrho))^2} \quad .
 \end{aligned}$$

Ein Zahlenbeispiel für einen Betonzylinder:

Für

$$\begin{aligned}
 r &= 0.0500 \text{ m} \quad , \\
 u(r) &= 0.0011 \text{ m} \quad , \\
 h &= 0.200 \text{ m} \quad , \\
 u(h) &= 0.013 \text{ m} \quad , \\
 \rho &= 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad , \\
 u(\rho) &= 50 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}
 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 (u(m))^2 &= \left(2 \cdot \pi \cdot 0.0500 \text{ m} \cdot 0.200 \text{ m} \cdot 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.0011 \text{ m} \right)^2 \\
 &\quad + \left(\pi \cdot (0.0500 \text{ m})^2 \cdot 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.013 \text{ m} \right)^2 \\
 &\quad + \left(\pi \cdot (0.0500 \text{ m})^2 \cdot 0.200 \text{ m} \cdot 50 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^2 \\
 &= 0.09373 \text{ kg}^2 \quad , \\
 u(m) &= \sqrt{0.09373 \text{ kg}^2} \\
 &= 0.31 \text{ kg} \quad , \\
 m &= \pi \cdot (0.0500 \text{ m})^2 \cdot 0.200 \text{ m} \cdot 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 &= 3.77 \text{ kg} \quad .
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet somit

$$m = 3.77(31) \text{ kg} \quad .$$

— Ende Teil 3 —

C.1.11. Verteilungsfunktionen und Arbeiten mit Unsicherheiten

C.1.11.1. Vom Histogramm zur Verteilung

Betrachtet man Histogramme mit immer mehr Einzelmessungen, so erhält man immer glattere Darstellungen. Im Grenzfall unendlich vieler Einzelmessungen ergibt sich eine stetige Funktion.²² Wenn man weiterhin diese Funktion noch so normiert, dass die Fläche unter der Kurve den Wert 1 hat, spricht man von einer *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*.²³ Was versteht man darunter?

Ein Exkurs: Der Begriff der Dichte wird in unterschiedlichen Zusammenhängen mit unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. So spricht man z. B. von der (Massen-)Dichte einer Flüssigkeit (Einheit $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) oder der Bevölkerungsdichte (Einheit $1 \frac{\text{Einwohner}}{\text{km}^2}$). In der Physik kennt man auch die Oberflächenladungsdichte (Einheit $1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$) und die lineare Ladungsdichte (Einheit $1 \frac{\text{C}}{\text{m}}$). Bei einer Gitarrensaite kann es durchaus sinnvoll sein, eine lineare Massendichte (Einheit $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$) anzugeben. All diesen Größen ist gemeinsam, dass sie beschreiben, wie „eng“ etwas in ein Volumen, auf eine Fläche oder auch auf eine Linie gepackt ist. Mathematisch handelt es sich jeweils um ein Verhältnis aus zwei verschiedenen Größen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte gibt an, wie die Werte einer Messung verteilt sind. Das kann als Verteilung vieler Einzelmessungen gemeint sein, aber auch als Darstellung der Kenntnis über die wahrscheinliche Lage eines einzelnen Messwertes. Liest man z. B. auf einer digitalen Skala eine Spannung von 2.36 V ab, dann hat man keinerlei Informationen über die möglicherweise folgenden Ziffern. Wenn das Messgerät rundet, sind alle Spannungswerte von 2.355000000... V bis 2.364999999... V gleich wahrscheinlich. Andererseits ist der Wert sicher nicht kleiner als 2.355 V und sicher nicht größer als 2.365 V, die Wahrscheinlichkeit für diese Werte ist null. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist in diesem Fall also eine Rechteckfunktion. Ihre Breite entspricht der Schrittweite der Digitalanzeige. Für andere Fälle ergeben sich andere Funktionstypen. So kann etwa die Ablesung einer Analogskala gut durch eine Dreiecksfunktion beschrieben werden. Als Breite wird dabei üblicherweise ebenfalls die „Schrittweite“ der Analoganzeige gewählt, also der Abstand benachbarter Markierungen.

C.1.11.2. Nützliche Verteilungen für die Berechnung von Unsicherheiten

Falls eine Bestimmung der Unsicherheit nach Typ A nicht möglich ist, z. B. weil zu wenige Messwerte vorliegen, kommt oft eine Bestimmung nach Typ B in Betracht, bei der so viele Kenntnisse wie möglich über den Messvorgang verwendet werden. Dann wird häufig eine Rechteckverteilung oder eine Dreiecksverteilung angenommen. Tabelle C.1.3 gibt einen Überblick über die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und Standardabweichungen.

²²Der Begriff „stetig“ ist hier als Gegensatz zu „diskret“ zu verstehen.

²³Sie kennen vermutlich die auf vielen Taschenrechnern verfügbare Funktion „binompdf“. Die Bezeichnung steht für binomial probability distribution function, also die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Binomialverteilung.

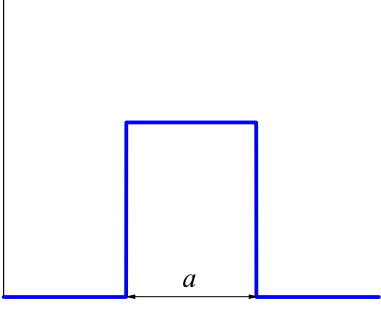
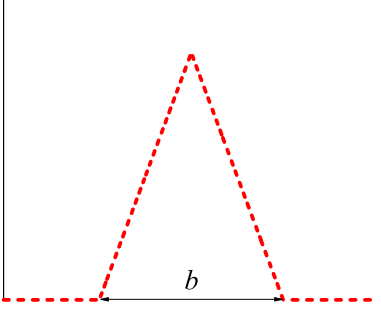
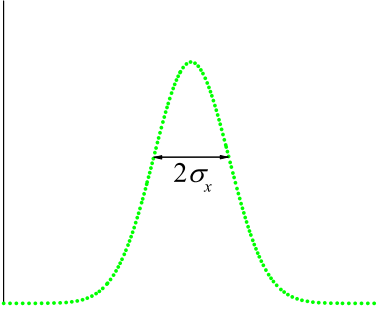
Name	Aussehen	typischer Fall	
Rechteck		Typ B, <u>einzelner</u> Ablesewert einer digitalen Anzeige. a entspricht der Schrittweite der Anzeige.	$u = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
Dreieck		Typ B, <u>einzelner</u> Ablesewert einer analogen Anzeige. b entspricht dem Abstand benachbarter Markierungen.	$u = \frac{b}{2\sqrt{6}}$
Gauß		Typ A, <u>mehrfache</u> Messung, Wert und Unsicherheit statistisch ermittelt aus n Einzelmessungen	$u = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Tabelle C.1.3.: Einige wichtige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und ihre zugehörigen Standardabweichungen.

C.1.12. Unsicherheit bei Zählereignissen, POISSON-Verteilung

Eine wichtige Gruppe von Experimenten behandelt sog. Zählereignisse. Bei diesen können die einzelnen Messwerte nur natürliche Zahlen einschließlich der Null sein. Bedeutet das,

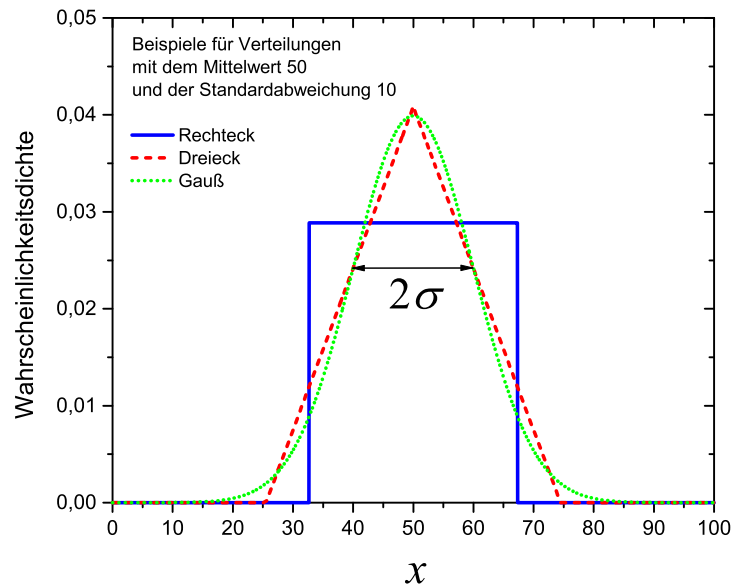


Abbildung C.1.8.: Direkter Vergleich verschiedener Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit übereinstimmenden Mittelwerten \bar{x} und Standardabweichungen σ_x .

dass hier ein Messwert ohne jede Unsicherheit vorliegt, weil man sich ja nicht „verzählen“ kann? Das kommt darauf an. Wenn man fragt, wie viele Ereignisse in einem konkreten Fall tatsächlich gezählt wurden, so ist die Antwort exakt bekannt und die zugehörige Unsicherheit null. Normalerweise interessiert man sich aber nicht so sehr für die Einzelmessung, sondern eher für den „typischen“ Zählwert bei der mehrfachen Wiederholung eines Zähl-experiments, also z. B. für die Anzahl von α -Teilchen, die „normalerweise“ in einer Sekunde von einer bestimmten radioaktiven Quelle emittiert werden. Da die Emission zufällig erfolgt, kann diese Zahl schwanken. Sie folgt dabei der sog. POISSON-Verteilung. Beim Zählen von radioaktiven Zerfällen (und vergleichbaren zufälligen Ereignissen wie dem Nachweis von RÖNTGENphotonen in einem GEIGER-MÜLLER-Zählrohr) ist die Wahrscheinlichkeit des Zählwerts ν während einer gegebenen Zeitdauer

$$P(\text{Zählwert } \nu) = p_\mu(\nu) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^\nu}{\nu!} \quad , \quad (\text{C.1.20})$$

wobei μ der erwartete mittlere Zählwert in dem betreffenden Zeitintervall ist. Nach unendlich vielen Experimenten erhält man als Erwartungswert den Mittelwert

$$\bar{\nu} = \mu \quad . \quad (\text{C.1.21})$$

Die Standardabweichung ist

$$\sigma_\nu = \sqrt{\mu} \quad . \quad (\text{C.1.22})$$

Die POISSON-Verteilung ergibt sich als Näherung aus der Binomialverteilung für den Fall, dass p sehr klein (z. B. Zerfallswahrscheinlichkeit eines radioaktiven Atomkerns während

eines Messintervalls, typische Größenordnung 10^{-20}) und gleichzeitig n sehr groß (z. B. Zahl der Atome in einer untersuchten Festkörperprobe, typische Größenordnung 10^{+20}) ist. Das Produkt np ergibt dabei gerade den Parameter μ der POISSON-Verteilung. Aus Gleichung (C.1.22) ergibt sich, warum es sinnvoll ist, Zählintervalle lieber etwas länger zu machen: wenn der gezählte Wert ν größer wird, wächst zwar auch σ_ν , aber das Verhältnis

$$\frac{u(\nu)}{\nu} = \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \quad (\text{C.1.23})$$

wird immer kleiner und damit günstiger.

C.1.13. Gesamtunsicherheit

Die durch die Ablesung der Skala (bzw. Digitalanzeige) verursachten Unsicherheiten sind nicht die einzigen Unsicherheiten einer Messung. Zusätzlich müssen noch weitere Unsicherheiten berücksichtigt werden, die z. B. durch die Bauweise des Messgerätes bedingt sind. Im günstigsten Fall sind Herstellerangaben dazu verfügbar. Sonst müssen möglichst glaubwürdige Werte auf andere Weise gewonnen werden, schlimmstenfalls muss geschätzt werden.

Ähnlich wie beim Kombinieren von Unsicherheiten mehrerer Größen zu einer neuen zusammengesetzten Größe („Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz“) werden auch diese verschiedenen Unsicherheiten einer Messung nach folgender Regel „quadratisch addiert“: Sei $u_{\text{Skala}}(x)$ die mit der Ablesung der Skala verbundene Unsicherheit und $u_{\text{Bauart}}(x)$ die bauartbedingte Unsicherheit des Messgerätes (beide nach Typ B bestimmt). Dann ist die

Gesamtunsicherheit gegeben durch $u_{\text{gesamt}} = \sqrt{(u_{\text{Skala}}(x))^2 + (u_{\text{Bauart}}(x))^2}$.

Der Grund, warum auch hier die Unsicherheiten „quadratisch addiert“ (d. h. erst quadriert, dann addiert und schließlich die Wurzel gezogen) werden liegt darin, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass alle Unsicherheitsquellen den Messwert immer in die gleiche Richtung verändern. Es ist sogar sehr wahrscheinlich, dass sie sich oft auch gegenseitig aufheben, insbesondere, wenn es mehr als zwei Unsicherheitsquellen sind. Unter gewissen Voraussetzungen kann man zeigen, dass die quadratische Addition diesem Umstand Rechnung trägt.

Die allgemeine Formel hierfür lautet:

$$u_{\text{gesamt}}(x) = \sqrt{(u_1(x))^2 + (u_2(x))^2 + (u_3(x))^2 + (u_4(x))^2 + \dots} \quad (\text{C.1.24})$$

C.1.14. Erweiterte Unsicherheit

Vor allem in Fällen, bei denen es ganz besonders auf Zuverlässigkeit ankommt, weil sonst z. B. Personenschäden drohen, gibt man oft an Stelle der kombinierten Standardunsicherheit $u(x)$ ein Vielfaches davon an, also $2 \cdot u_c(x)$ oder gar $3 \cdot u_c(x)$. Dadurch wird sichergestellt, dass der Anteil der „erfassten“ Fälle höher ist (statt 68.27 % dann 95.45 % bzw. 99.73 %, jeweils unter der Voraussetzung, dass eine GAUSS-Verteilung zugrunde liegt). Dies

wird dann als „erweiterte Unsicherheit“ U bezeichnet. Den gewählten Faktor bezeichnet man als Erweiterungsfaktor. Die Verwendung einer anderen als der Standardunsicherheit muss immer explizit genannt werden, um Missverständnisse zu vermeiden.

$$U(x) := k \cdot u_c(x) \quad (\text{C.1.25})$$

mit

$U(x)$ = erweiterte Unsicherheit

k = Erweiterungsfaktor

$u_c(x)$ = kombinierte Unsicherheit

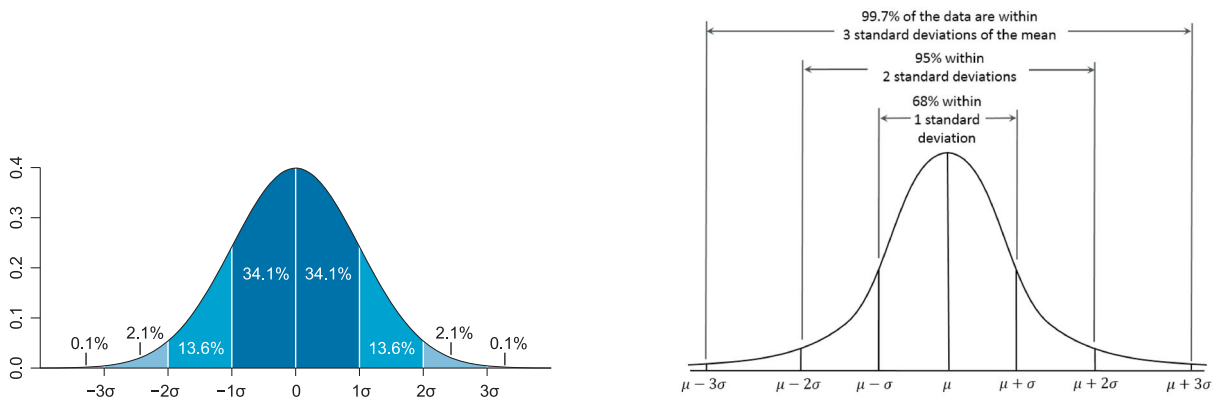


Abbildung C.1.9.: Wahrscheinlichkeiten bei der GAUSS-Verteilung [com, upl].

C.1.15. Vergleich von Messergebnissen

Sind zwei Messwerte gegeben, so stellt sich oft die Frage, ob die Werte „zueinander passen“ oder „miteinander verträglich sind“. Die Frage ist sehr zentral, denn die Antwort kann z. B. darüber entscheiden, ob „nur“ ein Ergebnis reproduziert wurde (was ja auch schon wichtig sein kann), oder ob eine völlig neue Entdeckung gemacht wurde. Eine quantitative Aussage ist dabei notwendig und mit Hilfe der Messunsicherheiten lässt sich diese Aussage treffen.

Zur Vereinfachung unterstellen wir, dass alle Messwerte einer GAUSS-Verteilung folgen und dass jeweils die Standardunsicherheit angegeben ist, also keine erweiterte Unsicherheit.

Unter diesen Umständen wollen wir zwei Messwerte als „miteinander verträglich“ bezeichnen, sofern sich die Unsicherheitsintervalle überlappen. Diese Regel ist recht einfach

anwendbar. Dann kann man sagen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass den Messungen tatsächlich der gleiche Werte zugrunde liegt, *mindestens* 68 % beträgt.²⁴

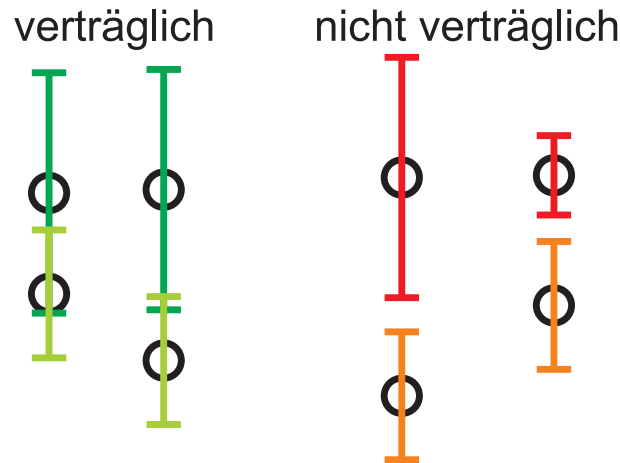


Abbildung C.1.10.: Illustration zur Faustregel beim Vergleich von Messergebnissen.²⁵

C.1.16. Begründung der Formel für die empirische Standardabweichung des Mittelwerts

Um Gleichung (C.1.6) zu begründen, betrachten wir nicht nur eine Messreihe, sondern eine große Zahl von Messreihen und deren Mittelwerte. Auch diese Mittelwerte unterliegen einer Verteilung mit einer gewissen Breite. Es handelt sich sozusagen um eine Stichprobe von n Mittelwerten.

Da der arithmetische Mittelwert nach Gleichung (C.1.4) definiert ist als

$$\begin{aligned}\bar{x} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{1}{n} \cdot x_1 + \frac{1}{n} \cdot x_2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot x_n \quad ,\end{aligned}\tag{C.1.26}$$

²⁴Wenn die beiden Unsicherheiten gleich groß sind, beträgt dieses sog. Vertrauensniveau sogar 84 %. Dieses Thema wird im Physikalischen Anfängerpraktikum zu Beginn des zweiten Semesters vertieft behandelt.

²⁵Die Unsicherheitsintervalle sind in dieser Abbildung als senkrechte Striche (hier mit kleinen Querstrichen am oberen und unteren Ende) durch die Messpunkte dargestellt. Dies ist die gängige Form der Darstellung in Diagrammen. Der Strich zeigt dabei die Lage des gesamten Unsicherheitsintervalls an. Man bezeichnet diese Darstellungsform als „Unsicherheitsbalken“. Häufig ist auch der veraltete Begriff „Fehlerbalken“ zu finden, ähnlich wie die Messunsicherheitsanalyse aus historischen Gründen weiterhin oft als Fehlerrechnung bezeichnet wird. Programme wie **Origin** und **SciDAVis** verwenden ebenfalls meist die Bezeichnungen „Fehler“ ((engl.) *error*) und „Fehlerbalken“ ((engl.) *error bar*).

und die x_i alle die gleiche Unsicherheit $u(x) = \sigma_x$ haben, gilt nach dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz (C.1.19) für die zugehörige Breite der Verteilung der Mittelwerte

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\bar{x}} &= u_c(\bar{x}) = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2} \cdot u(x_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_3} \cdot u(x_3)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_n} \cdot u(x_n)\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \cdot u(x_2)\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} \cdot u(x_n)\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot ((u(x_1))^2 + (u(x_2))^2 + \dots + (u(x_n))^2)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot (u(x))^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{n} \cdot (\sigma_x)^2} \\
 &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} .
 \end{aligned} \tag{C.1.27}$$

C.1.17. Verwerfen von Daten / CHAUVENET'sches Kriterium

Das Thema des Verwerfens von Daten ist ein besonders heikles, über das auch unter Fachleuten keine vollständige Einigkeit besteht, sondern das im Gegenteil kontrovers diskutiert wird. Eine häufig vertretene Meinung ist die, dass das Verwerfen von Daten *niemals* gerechtfertigt ist, sofern nicht *äußere Beweise* für die *Inkorrektheit* der Messwerte existieren.²⁶ Es mag aber zuweilen sinnvoll sein, zumindest ein Kriterium dafür zu haben, welche Daten *möglicherweise* hierfür in Frage kämen. Das weitere Vorgehen muss dann von Fall zu Fall sehr gewissenhaft abgewogen werden.

Unter gewissen Umständen kann es akzeptabel sein, folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Berechne aus den Messwerten den Mittelwert \bar{x} und die Standardabweichung der Stichprobe σ_x .
2. Bestimme für jeden fraglichen Wert x_i , wie wahrscheinlich es ist, dass bei der gegebenen Zahl n von Messungen ein Messwert mit einer so großen Abweichung von \bar{x} auftritt:
 - a) Bestimme, um wie viele Standardabweichungen der Messwert vom Mittelwert abweicht.

²⁶Ein äußerer Beweis für Inkorrektheit läge beispielsweise vor, wenn während einer empfindlichen optischen Messung offensichtlich Fremdlicht auf den Sensor fällt. Der abgelesene Messwert ist dann kein geeignetes Maß für die zur Untersuchung vorgesehene Größe. Er gehört folglich nicht zur Messreihe und *muss* sogar gestrichen werden.

- b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit P für eine so große Abweichung bei einer Einzelmessung unter der Voraussetzung einer GAUSS-Verteilung nach Tabelle C.1.4.
 - c) Bei n Messungen erwartet man dann insgesamt $n \cdot P$ solch stark abweichender Messwerte.
3. Verwerfe Messwerte, für die die erwartete Anzahl des Auftretens kleiner als $1/2$ ist, oder ziehe das Verwerfen dieser Messwerte zumindest in Erwägung.
 4. Berechne aus dem bereinigten Datensatz einen neuen Mittelwert $x := \bar{x}_{\text{neu}}$ und dessen neue Unsicherheit $u(x) := \sigma_{\bar{x}, \text{neu}} = \frac{\sigma_{x, \text{neu}}}{\sqrt{n_{\text{neu}}}}$.
 5. **Stopp!** Verfahren auf keinen Fall wiederholen!

Achtung: Auf keinen Fall darf die oben beschriebene Prozedur mehrfach hintereinander angewandt werden! Sonst besteht die große Gefahr, die Verteilung nach und nach immer schmäler zu machen und dabei auch Messwerte zu verwerfen, die zu Beginn in keiner Weise „zweifelhaft“ waren. Dies wäre ganz sicher ein völlig inakzeptabler Umgang mit Messwerten!

— Ende Teil 4 —

Tab. A. Die prozentuale Wahrscheinlichkeit, P (innerhalb $t\sigma$) = $\int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x) dx$, als Funktion von t .



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00	0,80	1,60	2,39	3,19	3,99	4,78	5,58	6,38	7,17
0,1	7,97	8,76	9,55	10,34	11,13	11,92	12,71	13,50	14,28	15,07
0,2	15,85	16,63	17,41	18,19	18,97	19,74	20,51	21,28	22,05	22,82
0,3	23,58	24,34	25,10	25,86	26,61	27,37	28,12	28,86	29,61	30,35
0,4	31,08	31,82	32,55	33,28	34,01	34,73	35,45	36,16	36,88	37,59
0,5	38,29	38,99	39,69	40,39	41,08	41,77	42,45	43,13	43,81	44,48
0,6	45,15	45,81	46,47	47,13	47,78	48,43	49,07	49,71	50,35	50,98
0,7	51,61	52,23	52,85	53,46	54,07	54,67	55,27	55,87	56,46	57,05
0,8	57,63	58,21	58,78	59,35	59,91	60,47	61,02	61,57	62,11	62,65
0,9	63,19	63,72	64,24	64,76	65,28	65,79	66,29	66,80	67,29	67,78
1,0	68,27	68,75	69,23	69,70	70,17	70,63	71,09	71,54	71,99	72,43
1,1	72,87	73,30	73,73	74,15	74,57	74,99	75,40	75,80	76,20	76,60
1,2	76,99	77,37	77,75	78,13	78,50	78,87	79,23	79,59	79,95	80,29
1,3	80,64	80,98	81,32	81,65	81,98	82,30	82,62	82,93	83,24	83,55
1,4	83,85	84,15	84,44	84,73	85,01	85,29	85,57	85,84	86,11	86,38
1,5	86,64	86,90	87,15	87,40	87,64	87,89	88,12	88,36	88,59	88,82
1,6	89,04	89,26	89,48	89,69	89,90	90,11	90,31	90,51	90,70	90,90
1,7	91,09	91,27	91,46	91,64	91,81	91,99	92,16	92,33	92,49	92,65
1,8	92,81	91,97	93,12	93,28	93,42	93,57	93,71	93,85	93,99	94,12
1,9	94,26	94,39	94,51	94,64	94,76	94,88	95,00	95,12	95,23	95,34
2,0	95,45	95,56	95,66	95,76	95,86	95,96	96,06	96,15	96,25	96,34
2,1	96,43	96,51	96,60	96,68	96,76	96,84	96,92	97,00	97,07	97,15
2,2	97,22	97,29	97,36	97,43	97,49	97,56	97,62	97,68	97,74	97,80
2,3	97,86	97,91	97,97	98,02	98,07	98,12	98,17	98,22	98,27	98,32
2,4	98,36	98,40	98,45	98,49	98,53	98,57	98,61	98,65	98,69	98,72
2,5	98,76	98,79	98,83	98,86	98,89	98,92	98,95	98,98	99,01	99,04
2,6	99,07	99,09	99,12	99,15	99,17	99,20	99,22	99,24	99,26	99,29
2,7	99,31	99,33	99,35	99,37	99,39	99,40	99,42	99,44	99,46	99,47
2,8	99,49	99,50	99,52	99,53	99,55	99,56	99,58	99,59	99,60	99,61
2,9	99,63	99,64	99,65	99,66	99,67	99,68	99,69	99,70	99,71	99,72
3,0	99,73	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3,5	99,95	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4,0	99,994	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4,5	99,9993	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5,0	99,99994	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Tabelle C.1.4.: Fläche unter der GAUSS-Funktion [Tay88]. Diese hängt zusammen mit der sog. „Fehlerfunktion“ $\text{erf}(t)$ (Schreibweise abgeleitet von (engl.) *error function*) über die Gleichungen (C.1.13) bis (C.1.15).

C.1.18. Gewichteter Mittelwert

Auch der Fall, dass nicht alle x_i die gleiche Unsicherheit aufweisen, verdient genauere Betrachtung, denn einerseits ist in der Praxis die Unsicherheit eines Messwertes manchmal vom Wert selbst²⁷ oder von anderen Einflüssen abhängig, andererseits kommt es häufig vor, dass Messergebnisse aus verschiedenen Messreihen kombiniert werden, die dann meist unterschiedliche Unsicherheiten aufweisen.

Seien y_1, \dots, y_n Messwerte derselben Größe y mit bekannten Unsicherheiten $u(y_1), \dots, u(y_n)$, so erhält man den besten Wert für y nach

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (w_i x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad , \quad (\text{C.1.28})$$

mit den „Gewichten“²⁸

$$w_i = (u(x_i))^{-2} = \frac{1}{(u(x_i))^2} \quad . \quad (\text{C.1.29})$$

Aus den Unsicherheiten der x berechnet man die sog. interne²⁹ Unsicherheit von \bar{x} :

$$u_{\text{int}}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}} \quad . \quad (\text{C.1.30})$$

Diese Unsicherheit ist immer kleiner als die kleinste Einzelunsicherheit.

Weiterhin betrachtet man die sog. externe³⁰ Unsicherheit von \bar{x} :

$$u_{\text{ext}}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (w_i \cdot (x_i - \bar{x})^2)}{(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n w_i}} \quad . \quad (\text{C.1.31})$$

$u_{\text{ext}}(\bar{x})$ wird groß, wenn die Einzelwerte x_i stärker voneinander abweichen, als es ihre einzelnen Unsicherheiten erwarten lassen. Dies kann z. B. dann der Fall sein, wenn wichtige Einflussgrößen nicht berücksichtigt wurden. Im günstigsten Fall steckt dahinter die Entdeckung neuer Physik. Der Vergleich von $u_{\text{int}}(\bar{x})$ mit $u_{\text{ext}}(\bar{x})$ ist also ein guter Test für die dem Experiment zugrunde liegenden Annahmen.

Als Unsicherheit von \bar{x} wird schließlich das Maximum von interner und externer Unsicherheit angegeben.

²⁷wie z. B. bei Zählereignissen

²⁸Das „ w “ steht für (engl.) *weight*.

²⁹Als Bezeichnungen sind auch „innere Unsicherheit“ oder „(engl.) *internal uncertainty*“ gebräuchlich.

³⁰Als Bezeichnungen sind auch „äußere Unsicherheit“ oder „(engl.) *external uncertainty*“ gebräuchlich.

C.1.19. Korrektur systematischer Abweichungen

Treten bei einer Messung sog. systematische Abweichungen auf, d. h. die Messwerte sind „nach einem bestimmten Muster verfälscht“, dann sind prinzipiell zwei Vorgehensweisen möglich:

1. Falls die Gesetzmäßigkeit, der die Verschiebungen folgen, bekannt ist, können diese rechnerisch rückgängig gemacht werden. Dabei ist ggf. eine kombinierte Unsicherheit zu berechnen, da die Korrekturen ebenfalls eine Unsicherheit aufweisen können.
2. Falls überhaupt keine weiteren Informationen über die Abweichungen vorliegen, bleibt nur die Möglichkeit, ihre Größe so gut wie möglich quantitativ zu erfassen (ggf. abzuschätzen) und als zusätzliche Unsicherheit in die Berechnung der Gesamtunsicherheit mit aufzunehmen.

Insofern unterscheiden sich die systematischen Abweichungen in ihrer Behandlung nicht grundlegend von anderen Unsicherheiten.

C.1.20. Regeln für Diagramme

1. Das Achsenkreuz
 - a) Wahl der Achsen
Die unabhängige Variable³¹ sollte auf der waagerechten Achse (der „x-Achse“) aufgetragen werden.
 - b) Achseneinteilung
Die Achseneinteilung sollte so gewählt werden, dass die Koordinaten jedes Datenpunktes schnell und leicht ermittelt werden können.
 - c) Nullpunktsunterdrückung
Wenn es keinen triftigen Grund gibt, den Achsenschnittpunkt auf einen bestimmten Wert zu legen, dann soll der Wertebereich beider Achsen so gewählt werden, dass die Daten einen möglichst großen Bereich des Diagramms ausfüllen. Das gilt auch dann, wenn eine oder beide Achsen logarithmisch dargestellt sind.
2. Datenpunkte und Unsicherheitsbalken
 - a) Symbole
Die Messpunkte sollen deutlich durch entsprechende Symbole gekennzeichnet werden.
 - b) unterschiedliche Messreihen
Punkte, die zu verschiedenen Messreihen gehören, sollten unterschiedlich gekennzeichnet werden (Form, Größe, Farbe der Symbole). Die Farbe als Unter-

³¹Das ist die Variable, die im Experiment vorgegeben wird und in deren Abhängigkeit die Messgröße ermittelt wird. Beispiel: Man ermittelt als Messgröße den Ort s eines Körpers als Funktion der Zeit t . Dann ist t die unabhängige Variable, s die abhängige Variable und man bestimmt die Funktion $s(t)$.

scheidungsmerkmal ist dabei mit Vorsicht zu genießen, weil sie bei Kopien oft nicht mehr unterscheidbar ist.

c) Unsicherheitsbalken

Die Messunsicherheit jedes Datenpunktes ist im Normalfall als Unsicherheitsbalken³² einzuzeichnen. Dabei kann es nötig sein, in beide Achsenrichtungen und sogar für positive und negative Abweichungen unterschiedliche Unsicherheitsbalken zu zeichnen.

3. Kurve durch Messpunkte

Eine durchgezogene Kurve kann die Lesbarkeit eines Diagramms erhöhen. Es sind aber einige Regeln zu beachten:

a) glatter Kurvenverlauf

In der überwiegenden Mehrheit der Fälle sind glatte Kurven zu erwarten (siehe Theorie des jeweiligen Experimentes), daher sollte die eingezeichnete Kurve glatt sein und nur wenige Wendepunkte haben.

b) „Treffen“ der Punkte

Es ist nicht nötig, dass die Kurve überhaupt einen Messpunkt enthält und sogar völlig unnötig, dass sie in einem Endpunkt endet. Endpunkte sind oft weniger genau, weil sie entweder durch die Grenzen der Messinstrumente oder der Messmethode bedingt sind. Das einfache Verbinden der Messpunkte nach Art einer „Fieberkurve“ ist fast immer unphysikalisch und sollte unterlassen werden.

c) Nähe zu Messpunkten

Die Kurve sollte so nahe wie möglich an allen eingezeichneten Punkten (Messwerten) verlaufen. Ein guter Anhaltspunkt sind dabei die eingezeichneten Unsicherheitsbalken.

d) Lage der Kurve

Wird eine Kurve „frei Hand“ eingezeichnet, dann sollte etwa jeweils die Hälfte der Messpunkte oberhalb und unterhalb der Kurve liegen. Das gilt sinngemäß auch für Teilstücke der Kurve.

— Ende Teil 5 —

³²Diese wurden früher meist und leider auch in aktueller Software noch oft als „Fehlerbalken“ bzw. „error bars“ bezeichnet.

C.1.21. Anpassung einer („Theorie“)-Funktion an Messwerte

C.1.21.1. Zweck der Anpassung

Vermutet man bei einer Messreihe einen funktionalen Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variable und der Messgröße, so kann man versuchen, eine passende Funktion mit einer Reihe noch zu bestimmender Parameter aufzustellen, die diesen Zusammenhang möglichst gut beschreibt. Einfache Beispiele sind lineare oder quadratische Funktionen, allgemeine Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen (\sin , \cos , \tan), Logarithmus- oder Exponentialfunktionen.

Die Form der Funktion ist dabei zunächst „geraten“ bzw. wird durch alle über die Messgröße vorhandenen Informationen nahegelegt.

Wichtig: Wählt man die Darstellung der Funktion sinnvoll, so haben ihre Parameter ggf. eine physikalische Bedeutung. Diese kann das eigentliche Ziel der Messung sein. So beschreibt z. B. die Steigung im $s(t)$ -Diagramm einer gleichförmigen Bewegung deren Geschwindigkeit v .

C.1.21.2. Die Methode der kleinsten Abweichungsquadrate

Bei der Berechnung der „passendsten Funktion“ handelt es sich um ein Optimierungsproblem. Der zu minimierende Ausdruck ist dabei die sog. „quadratische Abweichung“ der Funktion von den Messwerten. Diese Methode wird daher in der englischsprachigen Literatur als *least squares fit* bezeichnet.

Die Parameter werden so festgelegt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, genau die gemessenen Wertepaare zu erhalten, für diesen Parametersatz maximal wird. Mit anderen Worten: bei jedem anderen Parametersatz wäre es weniger wahrscheinlich gewesen, ausgerechnet diese Messwerte zu erhalten.

Etwas konkreter:

Gegeben sei eine Messreihe bestehend aus den Wertepaaren

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n) \quad ,$$

wobei x die unabhängige, y die abhängige Variable ist. Um die optimalen Parameter

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

der die Messreihe beschreibenden Funktion

$$f_{a_0, a_1, a_2, \dots}(x) = \dots$$

zu bestimmen, sucht man einen Satz von Parametern, der die quadratische Abweichung

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f_{a_0, a_1, a_2, \dots}(x_i))^2 \quad (\text{C.1.32})$$

minimiert.

$$(C.1.33)$$

Je komplizierter die Funktion ist, desto aufwendiger ist meist auch die Berechnung der am besten passenden Parameter. In vielen Fällen ist die Berechnung gar nicht mit einer analytischen Formel möglich, sondern erfolgt numerisch. Dabei wird zunächst für jeden Parameter ein Startwert gesetzt und anschließend untersucht, ob kleine Veränderungen der Parameter zu einer Verringerung von χ^2 führen. Bei einer Verringerung werden die neuen Parameter beibehalten, andernfalls wird der Schritt rückgängig gemacht. In den meisten Fällen stellt sich so nach hinreichend vielen Iterationen ein stabiler Zustand ein. Zwar gibt es im Einzelfall keine Garantie, dass die Methode zum Ziel führt, aber dafür können beliebige funktionale Zusammenhänge untersucht werden.

In einigen Spezialfällen kann durchaus auch eine analytische Berechnung erfolgen. Zwei dieser Fälle wollen wir in der Folge betrachten.

C.1.21.3. Ausgleichsgerade

Eine einfache Funktion, die man an eine Schar von Messpunkten anpassen kann, ist eine Gerade. Viele Programme ermöglichen die Berechnung einer solchen sog. Regressions- oder Ausgleichsgerade. Die Rechnung ist nicht sonderlich schwierig, wenn auch länglich, und zur Not auch mit dem Taschenrechner gut durchführbar³³

Es seien $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ Wertepaare einer Messreihe, an die eine Gerade der Form

$$y = a_0 + a_1 \cdot x \quad (C.1.34)$$

angepasst werden soll. Unter den Voraussetzungen, dass einerseits die Unsicherheit in den x_i vernachlässigbar ist und die y_i alle die gleiche Unsicherheit $u(y)$ aufweisen³⁴, genauer gesagt also, wenn alle Messwerte x_i exakt sind und jeder Messwert y_i einer GAUSS-Verteilung mit dem Breiteparameter $u(y)$ folgt, sind die besten Werte für die Konstanten a_0 und a_1 gegeben durch

$$a_0 = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{\Delta}, \quad (C.1.35)$$

$$a_1 = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\Delta} \quad (C.1.36)$$

mit

$$\Delta = n \left(\sum x_i^2 \right) - \left(\sum x_i \right)^2. \quad (C.1.37)$$

³³Die Herleitung dieser Ausdrücke ist hier für das Verständnis nicht notwendig und soll daher entfallen. Sie kann z. B. in [Tay88] nachgelesen werden.

³⁴Dies ist bei vielen Experimenten eine vernünftige Annahme. $u(y)$ muss nicht bekannt sein, sondern wird aus der Messreihe berechnet.

Weiterhin ergeben sich die Unsicherheiten der Messwerte y_i (mittlere Unsicherheit der Einzelmessung) sowie der Parameter a_0 und a_1 nach

$$(u(y))^2 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 \cdot x_i))^2 \quad (\text{C.1.38})$$

$$(u(a_0))^2 = \frac{(u(y))^2 \cdot \sum x_i^2}{\Delta} \quad (\text{C.1.39})$$

$$(u(a_1))^2 = \frac{n \cdot (u(y))^2}{\Delta} \quad (\text{C.1.40})$$

Man beachte den Nenner $(n-2)$ beim Fehler der Einzelmessung. Er ist gleich der Zahl der sogenannten „Freiheitsgrade“, d. h. der Zahl der Messwerte minus der Zahl der bereits aus ihnen berechneten Parameter und unterscheidet sich daher vom Nenner $(n-1)$ in Gleichung (C.1.5), bei der nur ein Parameter, nämlich der arithmetische Mittelwert, aus den Daten berechnet wird.

C.1.21.4. Mittelwert

Ein nochmals einfacherer Fall ist der bereits wohlbekannte arithmetische Mittelwert selbst, den wir bisher stets ohne nähere Begründung verwendet haben. Betrachtet man Wertepaare (i, y_i) aus der Nummer i der Messung und dem jeweiligen Messwert y_i , dann kann man versuchen, diese durch die konstante Funktion $y(i) = a_0 + 0 \cdot i$ zu beschreiben, also eine Gerade mit dem Achsenabschnitt a_0 und der Steigung null. Minimiert man in diesem Fall die Summe der Abweichungsquadrate, so vereinfachen sich die Terme weiter und es ergibt sich für a_0 der wohlbekannte Ausdruck des arithmetischen Mittelwerts aus Gleichung (C.1.4)

$$a_0 = \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{C.1.41})$$

C.1.21.5. Anpassung einer Geraden mit Gewichtung der Messwerte

Bei der Anpassung einer Geraden der Form $y = a_0 + a_1 \cdot x$ an einen Satz von Messwerten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ kann man verallgemeinerte Formeln für den Fall angeben, dass die

Unsicherheiten der x_i vernachlässigbar sind und die der verschiedenen y_i durch $u(y_i)$ gegeben sind. Man erhält dann:

$$a_0 = \frac{(\sum w_i x_i^2)(\sum w_i y_i) - (\sum w_i x_i)(\sum w_i x_i y_i)}{\Delta}, \quad (\text{C.1.42})$$

$$a_1 = \frac{(\sum w_i)(\sum w_i x_i y_i) - (\sum w_i x_i)(\sum w_i y_i)}{\Delta} \quad (\text{C.1.43})$$

$$(u(a_0))^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{(\sum w_i x_i^2) w_j - (\sum w_i x_i) w_j x_j}{\Delta} \cdot u(y_j) \right)^2 \quad (\text{C.1.44})$$

$$(u(a_1))^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{(\sum w_i) w_j x_j - (\sum w_i x_i) w_j}{\Delta} \cdot u(y_j) \right)^2 \quad (\text{C.1.45})$$

mit

$$\Delta = \left(\sum w_i \right) \left(\sum w_i x_i^2 \right) - \left(\sum w_i x_i \right)^2 \quad (\text{C.1.46})$$

$$w_i = 1 / (u(y_i))^2 \quad (\text{C.1.47})$$

Die Werte w_i bezeichnet man auch hier als „Gewichte“ der Messwerte. Sie sind ein Maß dafür, wie sehr der jeweilige Messwert die Berechnung der Ausgleichsgeraden beeinflusst. Ein typisches Beispiel für gewichtete Messwerte sind Zählwerte beim radioaktiven Zerfall.³⁵ Nach Abschnitt C.1.12 beträgt die absolute Unsicherheit eines Zählwertes ν dabei $\delta\nu = \sqrt{\nu}$, hängt also direkt vom Zählwert ab. Das Gewicht eines solchen Zählwertes ist dann $w = 1/(\sqrt{\nu})^2 = 1/\nu$.

C.1.21.6. Anpassung einer allgemeinen Funktion

Die beschriebene Vorgehensweise lässt sich auf beliebige Funktionen verallgemeinern. Dabei kann nach Bedarf eine Gewichtung der Messwerte nach den Unsicherheiten vorgenommen werden. Relativ häufig ist eine Gewichtung nach den Unsicherheiten der abhängigen Variablen. Prinzipiell kann man die Verallgemeinerung sogar noch weiter treiben und auch eine Gewichtung nach den Unsicherheiten der unabhängigen Variable durchführen. Das ist allerdings mit deutlich erhöhtem Aufwand verbunden, und da die Unsicherheiten der unabhängigen Variable meist wesentlich kleiner sind als die Unsicherheiten der abhängigen Variable, wird meist darauf verzichtet.

Die Kurvenanpassung für allgemeine Funktionen wird i. d. R. numerisch durchgeführt, da eine analytische Lösung für Fälle, die über die Geradenanpassung hinausgehen, meist nicht möglich ist. Im Praktikum steht hierfür z. B. das Programm **Origin** zur Verfügung.³⁶

³⁵Allerdings darf man nicht die Zählrate, sondern muss sinnvollerweise deren Logarithmus über der Zeit auftragen, um eine Ausgleichsgerade zu berechnen.

³⁶Eine Gewichtung über die Unsicherheiten der unabhängigen Variable bzw. beider Variablen ist dabei in der Standard-Version nicht möglich, wird aber im Praktikum auch nicht benötigt.

— Ende Teil 6 —

Literaturverzeichnis

- [Bir34] BIRGE, RAYMOND T.: *On Electric and Magnetic Units and Dimensions*. The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 2(2):41–48, 1934.
- [Bir35a] BIRGE, RAYMOND T.: *On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part I*. The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 3(3):102–109, 1935.
- [Bir35b] BIRGE, RAYMOND T.: *On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part II*. The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 3(4):171–179, 1935.
- [Bri31] BRIDGMAN, PERCY WILLIAMS: *Dimensional Analysis*. Yale University Press, New Haven / Connecticut, rev. edition, 1931. first published November 1922, revised edition March 1931, issued as a Yale Paperbound January 1963.
- [BS85] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 22. Auflage, 1985.
- [Bun11] BUNDESANSTALT, PHYSIKALISCH-TECHNISCHE (Herausgeber): *Auswertung von Messdaten – Eine Einführung zum „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ (GUM) und zu den dazugehörigen Dokumenten*, https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_8/8.4_mathematische_modellierung/8.40/JCGM_104_2009_DE_2011-03-30.pdf. PTB, Berlin, 1. Auflage, 2011.
- [COD15] CODATA (COMMITTEE ON DATA FOR SCIENCE AND TECHNOLOGY), NIST (NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY): “2014 CODATA recommended values”, <http://www.codata.org/>, <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/>, 2015. Datenbank für Fundamentalkonstanten usw., „CODATA 2014“ ist seit dem 25.06.2015 verfügbar und ersetzt den vorherigen Datensatz von 2010.
- [com] COMMONS, WIKIMEDIA: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Standard_deviation_diagram.svg&oldid=162269385. diagram on probabilities for various intervals.
- [fGiMJ10] METROLOGY (JCGM), JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN: *Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. 2010.
- [fNB95] NORMUNG E. V., DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR (Herausgeber): *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen – Deutsche Übersetzung des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“*. Beuth Verlag GmbH, Berlin · Wien · Zürich, 1. Auflage, 1995.

- [fNB99] NORMUNG E. V., DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR (Herausgeber): *DIN V ENV 13005:1999-06, Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen – Deutsche Übersetzung des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1. Auflage, 1999.
- [Gla71a] GLAISHER, J. W. L.: *On a class of definite integrals*. Phil. Mag. Ser. 4, 42:294–302, 1871.
- [Gla71b] GLAISHER, J. W. L.: *On a class of definite integrals – Part II*. Phil. Mag. Ser. 4, 42:421–436, 1871.
- [Gör75] GÖRTLER, HENRY: *Dimensionsanalyse*. Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 1975.
- [Ham23] HAMMER, E.: *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Geometrie*. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1923.
- [Hil78] HILLER, EDUARD: *Theonis Smyrnaei – Philosophi Platonici – Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. Teubner, Lipsiae (Leipzig), 1878.
- [Kie94] KIENLE, LOTHAR: *Größen – Größenkalkül – Dimensionsanalyse – 8 Aufsätze*. Franzbecker, Hildesheim, 1. Auflage, 1994.
- [Kis95] KISTERMANN, FRIEDRICH WILHELM: *Die Rechentechnik um 1600 und Wilhelm Schickards Rechenmaschine*. In: SECK, FRIEDRICH (Herausgeber): *Zum 400. Geburtstag von Wilhelm Schickard – Zweites Tübinger Schickard-Symposium 25. bis 27. Juni 1992*, Seiten 241–272, 1995.
- [Oxt34] OXTOBY, JOHN C.: *What Are Physical Dimensions?* The American Physics Teacher (since 1940: American Journal of Physics), 2(3):85–90, 1934.
- [Par64] PARKINSON, MICHAEL: *An axiomatic approach to dimensions in physics*. Am. J. Phys., 32(3):200–205, 1964.
- [Run16] RUNGE, C.: *Über die Dimensionen physikalischer Größen*. Physikalische Zeitschrift, 17:202–212, 1916.
- [Smyhr] SMYRNAEI, THEONIS: *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. ca. 100 n. Chr.
- [Tay88] TAYLOR, JOHN R.: *Fehleranalyse - Eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, 6940 Weinheim, Bundesrepublik Deutschland, 1. Auflage, 1988.
- [Tay97] TAYLOR, JOHN R.: *An Introduction to Error Analysis - The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. University Science Books, 55D Gate Five Road, Sausalito, CA 94965, USA, 2. Auflage, 1997.

[upl] UPLOADS, WIKIMEDIA: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a9/Empirical_Rule.PNG. diagram on probabilities for various intervals.