

C. Messunsicherheitsanalyse (MUA)

C.1. Messung und Messunsicherheit – Eine kleine Einführung

Arbeitsversion für das WiSe 2017/2018

Diese Datei wird jeweils passend zum Fortgang der Einführungsvorlesung erweitert.

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.“

— Wilhelm WEBER¹

C.1.1. Vorbemerkung

Diese Einführung in die Bestimmung physikalischer Größen („Messvorgang“) und der zugehörigen Messunsicherheiten erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie legt auch keinen allzu großen Wert auf mathematische Exaktheit, solange die Verwendbarkeit der Aussagen für naturwissenschaftliche Experimente dadurch nicht beeinträchtigt wird. Sie soll den Teilnehmerinnen und Teilnehmern am Physikalischen Anfängerpraktikum den Einstieg in diesen wichtigen Teil der experimentellen Naturwissenschaften erleichtern.

C.1.2. Physikalische Größen

Der Wert einer physikalischen Größe ist eine quantitative Aussage über ein Merkmal eines physikalischen Objektes.

Beispiele: Länge, Fläche, Volumen, Masse, Dichte, Temperatur, Geschwindigkeit, Impuls, Drehimpuls, ...

¹Dieses Zitat wird oft C. F. GAUSS zugeschrieben, aber:

Friedrich Wilhelm KISTERMANN schreibt in „Zum 400. Geburtstag von Wilhelm Schickard“, Zweites Tübinger Schickard-Symposium 25.-27. Juni 1992, herausgegeben von Friedrich Seck, Jan Thorbecke Verlag, Sigmaringen, 1995 in einer Fußnote ([Kis95] S. 248):

„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen als durch die maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.“ Ein meist C. F. Gauß zugeschriebener Ausspruch, der aber nach E. Hammer von dem sehr bekannten Wasserbaumeister Gotthilf Hagen überliefert ist und von einem berühmten Physiker (Hammer sieht darin den Gauß-Freund Wilhelm Weber) stammt ([Ham23] S. 621).

C.1.3. Messung: Zahlenwert und Einheit

Die quantitative Aussage einer Messung beruht darauf, dass die betrachtete Größe mit einer prinzipiell willkürlich festgelegten Einheit („Maßstab“) verglichen wird. Man erhält dabei einen Zahlenwert, der angibt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Zu jeder physikalischen Größe gehören daher Zahlenwert und Einheit. Man kann schreiben²

$$\begin{aligned} \text{Messwert} &= \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit} \\ x &= \{x\} \cdot [x] \end{aligned}$$

Beispiel: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum = 299792458 · Meter/Sekunde

Wesentlich beim Messvorgang sind also:

- Die Wahl einer Einheit.
- Der quantitative Vergleich der fraglichen Größe mit dieser Einheit.

Prinzipiell kann jede.r Naturwissenschaftler.in sich den Standard frei wählen. Sie können den Durchmesser einer CD also z.B. in Vielfachen der Breite Ihres eigenen Daumens ausdrücken. Auf diese Weise haben Sie eine ganz individuelle Einheit festgelegt. Um die Ergebnisse aber mit Kolleg.inn.en teilen zu können, ist eine gemeinsame Regelung nötig, denn sonst müssten Sie Ihren Daumen für alle Längenmessungen zur Verfügung stellen... Gute Standards zeichnen sich dadurch aus, dass sie bei vertretbarem technischen Aufwand möglichst gut reproduzierbar sind. Internationale Vereinbarungen stellen sicher, dass Angaben weltweit verständlich und eindeutig sind. So werden heute (nicht nur) in den Naturwissenschaften fast ausschließlich die Einheiten des sog. internationalen Einheitensystems („SI“) verwendet.

C.1.4. Schätzen

Auch ohne äußere Hilfsmittel kann man Aussagen über physikalische Größen treffen, indem man Unbekanntes mit Bekanntem vergleicht. Man bezeichnet diese Vorgehensweise üblicherweise als „Schätzen“. Dabei nutzt man das im Laufe des Lebens erworbene Wissen, um Einheiten festzulegen (z.B. die eigene Körpergröße) und die Eigenschaften physikalischer Objekte mit ihnen zu vergleichen. „Schätzen“ bedeutet also nicht einfach „Raten“! Typische Aussagen beim Schätzen enthalten Formulierungen wie „ist ungefähr“, „ist sicher größer als“, „ist sicher kleiner als“. Das Ergebnis ist also eher ein Intervall als

²Die Notation mit geschweiften Klammern für „der Zahlenwert von“ und eckigen Klammern für „die Einheit von“ ist international gebräuchlich. Man findet sie z.B. in der Norm DIN EN ISO 80000-1:2013-08.

Nach dieser Norm gilt weiterhin: der Zahlenwert einer Größe in Bezug auf eine bestimmte Einheit kann durch Hinzufügen der Einheit als Index an die geschweifte Klammer notiert werden, also z.B. bei einer Wellenlänge $\{\lambda\}_{\text{nm}}$. Vorzuziehen ist in solchen Fällen aber die Schreibweise als Verhältnis zwischen der Größe und der Einheit, also $\frac{\lambda}{\text{nm}}$.

ein Zahlenwert. Die Breite des Intervalls gibt dabei an, wie sicher man sich bei seiner Schätzung ist.

Die Übergänge zwischen „Schätzen“ und „Messen“ sind fließend. Im obigen Beispiel ist die Nutzung der Daumenbreite als Einheit zur Angabe von Längen kein äußeres Hilfsmittel im engeren Sinne und die Zuverlässigkeit ist offensichtlich begrenzt. In diesem Sinne würde man vermutlich eher von „Schätzen“ sprechen. Allerdings ist die Verwendung der persönlichen Daumenbreite (und nicht etwa einer allgemeinen „Fingerbreite“) bereits ein Schritt hin zu einer gewissen Reproduzierbarkeit der ermittelten Maßzahl. Dies ist ein wesentliches Merkmal einer Messung. Auch die teuersten Messgeräte vergleichen letztlich nur eine Größe mit einer Einheit.

C.1.5. Darstellung von Messwerten

C.1.5.1. Punkt auf der Zahlengeraden

Das Ergebnis einer Einzelmessung kann graphisch vereinfacht als Punkt auf einer Zahlengeraden dargestellt werden, indem man sich zunächst auf die Verwendung einer bestimmten Einheit festlegt und dann eine Markierung an die Stelle setzt, die dem ermittelten Zahlenwert entspricht (Abbildung C.1.1). Eine Angabe, wie sicher man sich ist, fehlt hier völlig. Um eine solche Angabe machen zu können, muss man sich ein Verfahren überlegen, wie das zugehörige Intervall festzulegen ist.

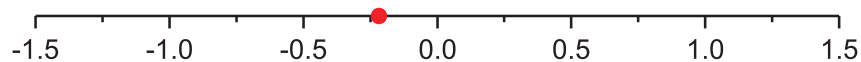


Abbildung C.1.1.: Darstellung des Ergebnisses einer Einzelmessung als Punkt auf der Zahlengeraden.

Eine gute Möglichkeit, Informationen über das Intervall zu erhalten, ist das mehrfache Wiederholen der Messung. Alle Messwerte werden auf die gleiche Weise dargestellt, indem weitere Punkte auf der Zahlengeraden gesetzt werden (Abbildung C.1.2). Dabei muss jeweils die gleiche Einheit verwendet werden.



Abbildung C.1.2.: Darstellung der Ergebnisse mehrerer Einzelmessungen als Punkte auf der Zahlengeraden.

C.1.5.2. Intervall auf der Zahlengeraden

In der Regel werden die Markierungen für mehrfach wiederholte Einzelmessungen über ein Intervall auf der Zahlengeraden streuen. Man kann nun dieses Intervall an Stelle eines Zahlenwerts verwenden, um die Mehrfachmessung zusammenzufassen und auch die Unsicherheit bei der Angabe des Gesamtergebnisses mit auszudrücken (Abbildung C.1.3). Die

Breite des Intervalls kann dabei von sehr vielen Faktoren abhängen. Es ist nicht unbedingt immer sinnvoll, das Intervall so festzulegen, dass wirklich alle erhaltenen Messwerte in ihm enthalten sind. An dieser Stelle ist eine detailliertere Betrachtung notwendig.



Abbildung C.1.3.: Intervall auf der Zahlengeraden.

C.1.5.3. Histogramm

Für diese detailliertere Betrachtung wählen wir eine Darstellung in Form eines sog. Histogramms. Dabei wird die Zahlengerade in kleinere Intervalle (sog. Klassen) eingeteilt, und es wird für jede dieser Klassen die zugehörige Anzahl der Einzelmessungen ermittelt, deren Zahlenwerte in die entsprechende Klasse fallen. Anschließend wird diese Häufigkeit graphisch als senkrechte Balken dargestellt. Abbildung C.1.4 zeigt ein Beispiel.

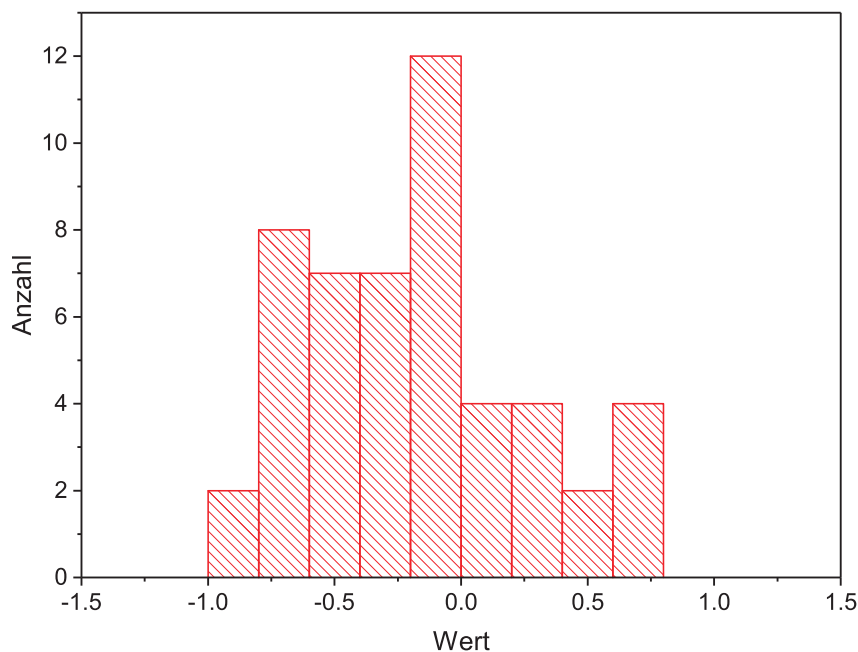


Abbildung C.1.4.: Beispiel für ein Histogramm.

Das Histogramm zeigt also die Häufigkeitsverteilung der Zahlenwerte der Einzelmessungen auf der Zahlengeraden.

C.1.5.4. BERNOULLI-Experiment und Binomialverteilung

Verteilungsfunktionen kennen Sie sicher bereits aus einem anderen Zusammenhang, z. B. die Binomialverteilung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen heißt BERNOULLI-Experiment. Ein Beispiel ist das Werfen einer (idealen) Münze. Führt man solch ein Experiment mehrfach hintereinander aus, so spricht man von einem mehrstufigen Zufallsexperiment. Ein Beispiel ist das fünfmalige Werfen einer Münze.

Betrachten wir nun ein solches Zufallsexperiment mit n Schritten, wobei es in jedem Schritt nur zwei mögliche Ausgänge („Erfolg“, „kein Erfolg“) gibt und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines „Erfolgs“ in jedem Einzelschritt p (von (engl.) *probability*) beträgt ($0 \leq p \leq 1$). Die Gesamtwahrscheinlichkeit P für das Auftreten von k Erfolgen bei n Versuchen ist dann gegeben durch die sog. Binomialverteilung

$$P(k \text{ Erfolge bei } n \text{ Versuchen}) = B_{n,p}(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{C.1.1})$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{C.1.2})$$

mit

n = Zahl der Versuche bzw. Schritte,
 k = Zahl der Erfolge,
 p = Erfolgswahrscheinlichkeit
bei einem einzelnen Schritt.

Dabei steht $n!$ für die sog. Fakultät der natürlichen Zahl n , $\binom{n}{k}$ für den sog. Binomialkoeffizienten (Sprechweise deutsch: „ n über k “, Sprechweise (engl.): „ n choose k “).³

Der Erwartungswert der Erfolge (d. h. die mittlere Anzahl der Erfolge nach vielen Reihen von jeweils n Versuchen) ist

$$\bar{k} = n \cdot p \quad . \quad (\text{C.1.3})$$

— Ende Teil 1 —

³Bemerkungen:

- Weniger gebräuchliche deutsche Sprechweisen sind „ k aus n “ oder „ n tief k “.
- Auf Taschenrechnern findet man häufig die aus dem Englischen abgeleitete Abkürzung nCr für „ n choose r “
- Bitte nicht verwechseln: der englische Ausdruck „ n over k “ würde den Quotienten $\frac{n}{k}$ bedeuten, auf deutsch also „ n geteilt durch k “.
- Zu diesen Schreibweisen siehe auch Abschnitt F auf Seite 799, insbesondere die Gleichungen (F.1.7) bis (F.1.34). Dort sind auch Näherungsformeln für die Berechnung der Fakultät für große Zahlen angegeben.

C.1.5.5. „Kenngrößen“ von Verteilungen

Das Histogramm enthält die gesamte Information über die Verteilung der erhaltenen Messwerte und ist perfekt geeignet, das Ergebnis einer wiederholten Messung (einer „Messreihe“) wiederzugeben. Allerdings ist es relativ unpraktisch, als Ergebnis immer gleich ein ganzes Diagramm darstellen zu müssen.

Handlicher ist es, eine begrenzte Anzahl geeigneter Kenngrößen aus einem Histogramm abzuleiten, die die wesentlichen Informationen beinhalten. Mindestens erforderlich sind dazu der „typische Wert“ der Verteilung und dessen „typische Unsicherheit“.

Der „typische“ (und somit in gewisser Weise zur Charakterisierung beste) Wert einer Verteilung von Messwerten wird i. d. R. durch den arithmetischen Mittelwert berechnet:

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{C.1.4})$$

Es werden also alle Messwerte addiert und dann durch die Anzahl der Messwerte geteilt. Bei unendlich vielen Messwerten liefert dieses Verfahren den sog. Erwartungswert. Für eine endliche Zahl von Messwerten den „besten“ Schätzwert hierfür.

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Unsicherheit bei der Angabe dieses typischen Werts ist etwas weniger offensichtlich. In einem ersten Schritt berechnet man ein Maß für die Breite der Verteilung, indem man die Abweichung aller Einzelmessungen vom Mittelwert „quadratisch mittelt“. Man definiert als

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{C.1.5})$$

die sog. empirische Standardabweichung. Wie man leicht sieht, ist ihr Wert immer positiv und wird größer, je stärker die Messwerte vom Mittelwert abweichen.⁴

In einem zweiten Schritt berechnet man aus dieser empirischen Standardabweichung σ_x die sog. empirische Standardabweichung des Mittelwerts:

$$\sigma_{\bar{x}} := \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (\text{C.1.6})$$

Dieser Wert ist ein gutes Maß für die Unsicherheit bei der Angabe des Mittelwerts und wird als sog. Standardunsicherheit verwendet.⁵

Statt eines Histogramms beschränkt man sich meist auf die Angabe von $x := \bar{x}$ und $u(x) := \sigma_{\bar{x}}$, die dann gemeinsam als das Endergebnis der Messreihe betrachtet werden. Teilweise werden zusätzlich auch noch n und/oder σ_x angegeben.

Unweigerlich geht bei diesem Zusammenfassen der Daten Information verloren. Das Ergebnis ist aber dafür viel „handlicher“. Es handelt sich also um einen typischen Kompromiss.⁶

⁴Warum hier im Nenner statt n der Ausdruck $(n-1)$ steht, werden wir später begründen.

⁵Die beiden Begriffe sind nicht ganz bedeutungsgleich. Die Bezeichnung „Standardunsicherheit“ wird auch in Fällen verwendet, in denen die Festlegung auf eine andere Art und Weise durchgeführt wird.

⁶Man kann die Vorgehensweise als verlustbehaftete Datenkompression betrachten, ein bisschen so wie

C.1.5.6. Vorteil der Mehrfachmessung

Ein wichtiger Aspekt zeigt sich in Gleichung (C.1.6): Die Unsicherheit $\sigma_{\bar{x}}$ des Mittelwerts wird kleiner, wenn die Zahl n der Einzelmessungen ansteigt. Dies ist ein wesentliches Argument für die übliche Vorgehensweise, Messungen nicht nur einmal sondern wiederholt durchzuführen.

C.1.5.7. Signifikante Stellen

Bei der Angabe von Ergebnissen muss die Unsicherheit in geeigneter Weise berücksichtigt werden. So ist es z. B. nicht sinnvoll, einen Messwert mit einer beliebig großen Zahl von Ziffern anzugeben (siehe Zitat von Wilhelm WEBER auf Seite 749 am Anfang des Kapitels). Den Benzinverbrauch eines Kraftfahrzeugs mit 7.4958451 L/100 km anzugeben wäre offensichtlich genauso unsinnig wie die Länge einer Schaumstoffmatratze mit 1.9762587 m. Für die „richtige“ Ziffernzahl gibt es keine allgemein gültigen strengen Vorschriften. Folgende Regeln haben sich aber in der Forschungspraxis bewährt und sollen daher auch im Praktikum angewendet werden:

- Angabe der Unsicherheit des Ergebnisses mit zwei geltenden Ziffern (man zählt von links ab der ersten von null verschiedenen Ziffer).
Beispiel: $u(x) = 0.0\mathbf{33}$ m
- Angabe des Messwertes mit so vielen Ziffern, dass die Wertigkeit der letzten Ziffern von Messwert und Unsicherheit übereinstimmt (auch wenn dadurch eine oder mehrere Nullen am Ende geschrieben werden müssen).
Beispiele:
 - $x = 3.5\mathbf{12}$ m
 - $x = 1.4\mathbf{10}$ m
 - $x = 7.0\mathbf{00}$ m
- Angabe von Zwischenergebnissen bei längeren Rechnungen jeweils mit einer Ziffer mehr (also drei geltende Ziffern bei der Unsicherheit), um dem Ansammeln von Rundungsfehlern entgegenzuwirken.
Beispiel: $x = 3.5\mathbf{123}$ m mit $u(x) = 0.0\mathbf{333}$ m

C.1.5.8. Runden von Zahlen

Die (zumindest in Deutschland) verbreitetste Regel zum Runden von Dezimalzahlen ist das sog. kaufmännische Runden, umgangssprachlich auch als „4-5-Rundung“ bezeichnet.⁷ Beim kaufmännischen Runden gelten folgende Regeln:

beim Erstellen von mp3-Dateien für Musik oder jpg-Dateien für Bilder. Diese geben auch nicht alle Details wieder, sind dafür aber wesentlich platzsparender als „Rohdaten“.

⁷Etwas erweiterte Regeln gelten für das wissenschaftliche Runden[BS85], das auch als mathematisches, geodätisches, unverzerrtes oder symmetrisches Runden bezeichnet wird. Der Unterschied zum sog. kaufmännischen Runden besteht nur in der besonderen Behandlung der Ziffer 5 und spielt in der Praxis kaum eine Rolle.

1. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird (betragsmäßig) abgerundet.

Beispiele:

- 3.1415**9**265... → 3.1415**9**
- 3.1**4**159265... → 3.1**4**
- **3**.14159265... → **3**

2. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird (betragsmäßig) aufgerundet. Beispiele:

- 3.141592**6**5... → 3.141592**7**
- 3.141**5**9265... → 3.141**6**
- 3.14**1**59265... → 3.14**2**

Hinweis: Wird die Rundung schrittweise durchgeführt, so kann es u. U. zu falschen Ergebnissen kommen. Nach Möglichkeit muss daher bei jeder Rundung wieder auf den ursprünglichen Zahlenwert zurückgegriffen werden.

Falsch wäre z. B. ein Runden in dieser Form: 1.374532... → 1.375 → 1.38.

Richtig muss hier wie folgt gerundet werden: 1.374532... → 1.37.

C.1.6. Schreibweisen für Unsicherheiten

Es gibt verschiedene Schreibweisen zur Angabe von Unsicherheiten bei Messwerten. Der Übersichtlichkeit halber soll im Physikalischen Anfängerpraktikum eine der in Tabelle C.1.1 angegebenen Schreibweisen verwendet werden.

1. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird (betragsmäßig) abgerundet.

2. a) Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 5 (gefolgt von weiteren Ziffern, die nicht alle null sind), 6, 7, 8 oder eine 9, so wird (betragsmäßig) aufgerundet. Beispiele:

- 3.14**1**592653589793... → 3.14**2**
- 3.141592**6**53589793... → 3.141592**7**
- 3.14159265**3**589793... → 3.14159265**4**
- 3.1415926535897932384626433832**7**950288... → 3.1415926535897932384626433832**8**0

- b) Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer lediglich eine 5 (oder eine 5, auf die nur Nullen folgen), so wird derart gerundet, dass die letzte beizubehaltende Ziffer gerade wird.

Beispiele:

- 3.141592**6**5 → 3.141592**6**
- 3.141592**6**5000 → 3.141592**6**
- 3.14**1**5 → 3.14**2**
- 3.14**1**5000 → 3.14**2**

3. Folgt auf die letzte beizubehaltende Ziffer eine 6, 7, 8 oder 9, so wird (betragsmäßig) aufgerundet.

Diese Art der Rundung ist in internationalen Normen (z. B. IEEE 754) standardmäßig vorgesehen und daher oft auch in Computerprogrammen implementiert.

Die Unsicherheiten werden dabei als (immer positive) „absolute Unsicherheiten“ $u(x)$ möglichst mit der gleichen Einheit⁸ wie der zugehörige Wert x angegeben.

Nr.	Form	Beispiel 1	Beispiel 2	Kommentar
1	$\{x\}(\{u(x)\})[x]$ führende Nullen der Unsicherheit werden <u>nicht</u> geschrieben	2.000(50) m	7.985(42) kg	sehr kompakt, häufig in wissenschaftlichen Veröffentlichungen
2	$x \pm u(x)$	2.000 m \pm 0.050 m	7.985 kg \pm 0.042 kg	
3		(2.000 \pm 0.050) m	(7.985 \pm 0.042) kg	
4		2.000 m \pm 5.0 cm	7.985 kg \pm 42 g	sehr häufig auch im Alltag

Tabelle C.1.1.: Verschiedene übliche Schreibweisen zur Angabe von Messergebnissen einschließlich der zugehörigen Messunsicherheiten. Die Schreibweise 1 wird in internationalen Normen wie der DIN EN ISO 80000-1:2013-08 empfohlen. Bitte beachten Sie dabei: die eingeklammerten Ziffern sind keineswegs weitere Dezimalstellen, deren Gültigkeit möglicherweise irgendwie eingeschränkt ist, sondern sie stellen die Messunsicherheit selbst als Absolutwert dar. Die Wertigkeit der letzten Ziffer vor der Klammer entspricht dabei der Wertigkeit der letzten Ziffer in der Klammer. Ausführliche Erläuterungen zu den Schreibweisen finden sich u. a. in [fNB95].

C.1.7. Nomenklatur nach GUM

Seit 1993 gibt es internationale Empfehlungen zum Umgang mit Messunsicherheiten, nämlich den „Guide to the expression of uncertainty in mesasurement (GUM)“ [fGiMJ10] und seine deutsche Übersetzung „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ [Bun11, fNB99]. Der vorliegende Text folgt weitgehend diesen Empfehlungen.

Die hier dargestellte Ermittlung einer Messunsicherheit durch statistische Auswertung der Einzelmessungen ist eine der nach GUM empfohlenen Vorgehensweisen. Die ermittelte Unsicherheit wird dann als Unsicherheit vom „Typ A“ bezeichnet. Alle nach anderen Vorgehensweisen ermittelten Unsicherheiten werden als „Typ B“ bezeichnet. Diese Bezeichnungen stellen keine Wertung dar. Wir werden später auch Typ B noch ausführlicher betrachten.

⁸Auf jeden Fall mit der gleichen Dimension, also z. B. Dimension einer Länge, Masse, Geschwindigkeit, usw.

C.1.7.1. Kenngrößen der Binomialverteilung

Betrachten wir als Beispiel die Kenngrößen der Binomialverteilung (siehe Gleichung (C.1.1)). Der Erwartungswert der Erfolge (d. h. die mittlere Anzahl der Erfolge nach vielen Reihen von jeweils n Versuchen) ist

$$\bar{k} = n \cdot p \quad , \quad (\text{C.1.7})$$

die zugehörige Standardabweichung ist

$$\sigma_k = \sqrt{np(1-p)} \quad . \quad (\text{C.1.8})$$

Da keine wiederholte Messung mit einer endlichen Anzahl von Einzelmesswerten vorliegt, sondern die gesamte Binomialverteilung exakt bekannt ist, ist hier weder die Berechnung der *empirischen* Standardabweichung noch der *empirischen* Standardunsicherheit des Mittelwerts sinnvoll.

In der Experimentalphysik ist die Binomialverteilung selbst zwar nicht von allzu großer praktischer Bedeutung, sie ist aber quasi die „Mutter aller Verteilungen“. Aus ihr folgen die POISSON-⁹ und die überaus wichtige GAUSS-Verteilung¹⁰ als Näherungen.

C.1.7.2. Die GAUSS-Verteilung (auch Standard- oder Normalverteilung)

Die GAUSSverteilung¹¹ ist gegeben durch

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad (\text{C.1.9})$$

wobei

μ = Zentralwert der Verteilung

σ = Standardabweichung der Verteilung
= „Breite der Verteilung“

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert x in höchstens t Standardabweichungen σ vom Zentralwert μ liegt, d. h. dass gilt $(\mu - t\sigma) \leq x \leq (\mu + t\sigma)$, ist

$$\begin{aligned} P(\text{innerhalb } t\sigma) &= \int_{\mu-t\sigma}^{\mu+t\sigma} G_{\mu,\sigma}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-t}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.1.10})$$

⁹wird im Rahmen der AP-Einführung in zwei Wochen behandelt

¹⁰Für die GAUSS-Verteilung findet sich der Beweis hierzu z. B. in [Tay88] S. 175 f.

¹¹Mathematisch exakt handelt es sich bei G um die Wahrscheinlichkeitsdichte der GAUSSverteilung. Zumindest in der Physik hat es sich aber eingebürgert, G selbst etwas verkürzt als GAUSSverteilung zu bezeichnen.

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} P(\text{innerhalb } 1\sigma) &\approx 68.27\%, \\ P(\text{innerhalb } 2\sigma) &\approx 95.45\%, \\ P(\text{innerhalb } 3\sigma) &\approx 99.73\%. \end{aligned}$$

Auch wenn σ üblicherweise als „die Breite“ der GAUSS-Verteilung bezeichnet wird, bedeutet das also offensichtlich nicht, dass *alle* Messwerte innerhalb dieser Breite zu finden sind. Selbst wenn man ein doppelt oder dreimal so großes Intervall betrachtet, erreicht man durch den exponentiellen Ausdruck in Gleichung (C.1.7.2) nie 100%.

Das Integral in Gleichung (C.1.10) hängt zusammen mit der sog. „Fehlerfunktion“ $\text{erf}(t)$ (Schreibweise abgeleitet von (engl.) *error function*)¹²

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad . \quad (\text{C.1.11})$$

über

$$P(\text{innerhalb } t\sigma) = \text{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{C.1.12})$$

An den Stellen $\mu \pm \sigma$ liegen die Wendepunkte der glockenförmigen GAUSSkurve (siehe Abbildung C.1.5). Der Funktionswert beträgt an diesen Stellen jeweils $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$, unterscheidet sich also um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{e}}$ vom Maximalwert $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ an der Stelle μ .

C.1.8. Kombinierte Unsicherheiten

Bisher haben wir nur Unsicherheiten betrachtet, die mit der Bestimmung einer einzigen physikalischen Größe x zusammenhängen. Oft sind physikalische Größen aber nicht direkt messbar, sondern nur auf dem Umweg über die Messung anderer Größen, mit denen ein formelmäßiger Zusammenhang bekannt ist.¹³ Verknüpft man nun aber zwei oder mehrere Messergebnisse für gleiche oder verschiedene physikalische Größen (die jeweils wieder aus mehreren Einzelmessungen berechnet sein können) zu einer neuen physikalischen Größe, so führt die Unsicherheit in den Ausgangsgrößen dazu, dass auch die neu berechnete Größe eine gewisse Unsicherheit aufweist.

¹²Leider werden in diesem Zusammenhang die Begriffe manchmal nicht ganz eindeutig definiert und verwendet. Insbesondere wurden sowohl der Ausdruck „Fehlerintegral“ als auch die Schreibweise $\text{erf}(t)$ von verschiedenen Autoren in der Vergangenheit unterschiedlich verwendet. Dies ist historisch begründet. Die Namensgebung geht zurück auf J. W. L. GLAISHER, der als Erster diese Bezeichnung für eine derartige Funktion verwendete (allerdings damals noch mit der Schreibweise $\text{Erf}(x)$ und mit einer etwas anderen Definition) [Gla71a, Gla71b]. Inzwischen ist die Funktion aber international genormt (siehe z. B. DIN EN ISO 80000-2 – Achtung: Schreibfehler in der unteren Integrationsgrenze wird erst in der Auflage 2018 behoben).

¹³Manchmal ist es auch einfach nur praktischer, diesen Weg zu gehen, selbst wenn eine direkte Messung prinzipiell möglich wäre.

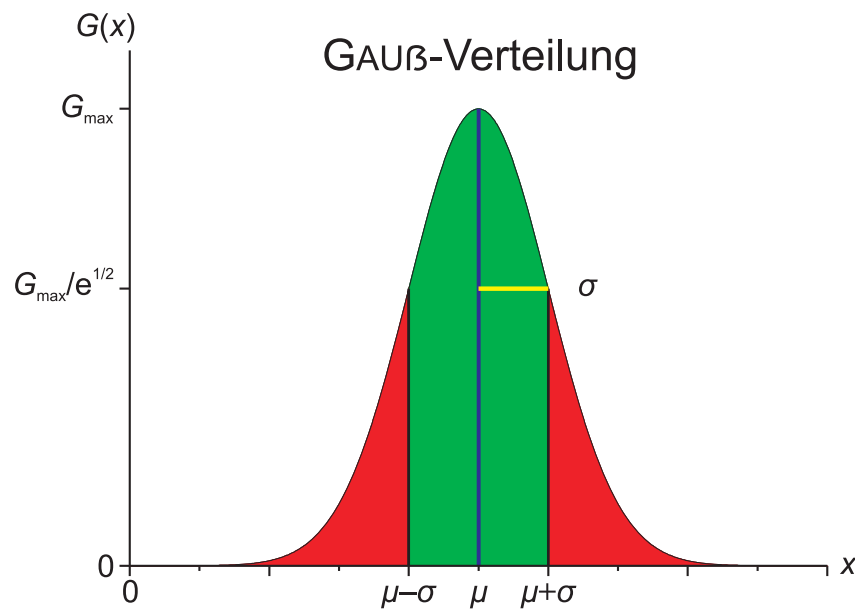


Abbildung C.1.5.: Die GAUSS-Verteilung (auch Standard- oder Normalverteilung).

Die quantitative Bestimmung dieser Unsicherheit ist eine wichtige Aufgabe bei der Messunsicherheitsanalyse. Dabei soll der angegebene Wert weder eine zu große Genauigkeit vortäuschen, noch zu pessimistisch sein. Für die mit Hilfe der Statistik gefundene Lösung wird im GUM der Begriff „kombinierte Standardunsicherheit“ verwendet. Zur Berechnung ist es nötig, die Verteilungen der „Eingangsgrößen“ und der „Ausgangsgröße“ genauer zu betrachten.

— Ende Teil 2 —

C.1.8.1. Signifikante Stellen – Begründung für die Wahl der Stellenzahl

Eine Begründung für die Wahl der Zahl signifikanter Ziffern ergibt sich aus statistischen Überlegungen. Wenn die Standardunsicherheit rechnerisch als Standardabweichung des Mittelwerts aus einer endlichen Zahl von Einzelmessungen bestimmt wird, weist sie selbst eine Unsicherheit auf. Unter der Voraussetzung einer GAUSS-Verteilung kann man zeigen, dass gilt (siehe z. B. [Tay97]):

$$\frac{\sigma_{\sigma_x}}{\sigma_x} \approx \frac{\sigma_{\sigma_{\bar{x}}}}{\sigma_{\bar{x}}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \quad (\text{C.1.13})$$

Diese Unsicherheit ist also bei einer kleinen Zahl von Einzelmessungen besonders groß. Da (insbesondere im Praktikum) meist keine „riesigen“ Zahlen von Einzelmessungen vorliegen, kann man die „Unsicherheit der Unsicherheit“ abschätzen:

Zahl der Einzelmessungen	prozentuale Unsicherheit der Unsicherheit
3	50 %
10	24 %
50	10 %
100	7 %
1000	2 %

Tabelle C.1.2.: Unsicherheit der Unsicherheit berechnet nach der Näherungsformel

Bei der Angabe der Unsicherheit soll weder durch zu viele Stellen eine zu große Genauigkeit vorgetäuscht werden, noch durch die Angabe von zu wenigen Stellen eine zu große Unsicherheit signalisiert werden.

Betrachten wir nun den prozentualen Unterschied zwischen den möglichen Werten für Unsicherheitsangaben mit 1, 2 oder 3 Ziffern, so erhalten wir:

- 1 Ziffer: mögliche Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Zwischen „1“ und „2“ liegt die größte prozentuale Abweichung. Sie beträgt $\frac{2-1}{1} = 100\%$. Zwischen „9“ und „8“ liegt die kleinste prozentuale Abweichung. Sie beträgt $\frac{9-8}{9} \approx 11\%$. Das ist selbst bei nur 10 Messwerten zumindest für die kleineren Ziffern eine zu große Schrittweite.
- 2 Ziffern: mögliche Werte 10, 11, 12, 13, ..., 97, 98, 99
Zwischen „10“ und „11“ liegt die größte prozentuale Abweichung. Sie beträgt $\frac{11-10}{10} = 10\%$. Zwischen „99“ und „98“ liegt die kleinste prozentuale Abweichung. Sie beträgt $\frac{99-98}{99} \approx 1\%$. Das ist in vielen Fällen sinnvoll.
- 3 Ziffern: mögliche Werte 100, 101, 102, 103, ..., 997, 998, 999
Zwischen „100“ und „101“ liegt die größte prozentuale Abweichung. Sie beträgt $\frac{101-100}{100} = 1\%$. Zwischen „999“ und „998“ liegt die kleinste prozentuale Abweichung. Sie beträgt $\frac{999-998}{999} \approx 0.1\%$. Das sind zwar recht kleine Schritte, aber für Zwischenergebnisse in vielen Fällen gerade angemessen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die schon in C.1.5.7 auf Seite 756 formulierte Faustregel, dass Endergebnisse mit zwei signifikanten Ziffern der Unsicherheit angegeben werden, Zwischenergebnisse mit mindestens einer Ziffer mehr.

C.1.9. Kombinierte Unsicherheiten, Empfindlichkeitskoeffizienten

C.1.9.1. Funktionen einer Variable

Bildet man aus einer Größe a mit Hilfe der Funktion f eine neue Größe $z = f(a)$, so lassen sich die Kenngrößen der Verteilung der Größe z aus den Kenngrößen der Verteilungen der Größe a berechnen. Ein Beispiel wäre das Füllvolumen einer beliebig geformten Vase als Funktion ihrer Füllhöhe.

Der Wert von z ergibt sich dabei einfach als der Funktionswert. Zur Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(z)$ bildet man die Ableitung $\frac{dz}{da}$. Betrachtet man die Steigungsdreiecke in Abbildung C.1.6, so wird klar, dass gilt:

$$u_c(z) = \frac{dz}{da} \cdot u(a) \quad . \quad (\text{C.1.14})$$

Zur zahlenmäßigen Berechnung muss noch der für die Größe a bestimmte „beste“ Wert a_0 in den Ableitungsausdruck eingesetzt werden. Man sagt dazu, die Ableitung wird an der Stelle a_0 ausgewertet. Der erhaltene Ableitungswert $\frac{dz}{da}(a_0)$ wird auch als Empfindlichkeitskoeffizient von z bezüglich a bezeichnet, weil er angibt, wie „empfindlich“ z auf Änderungen von a reagiert.

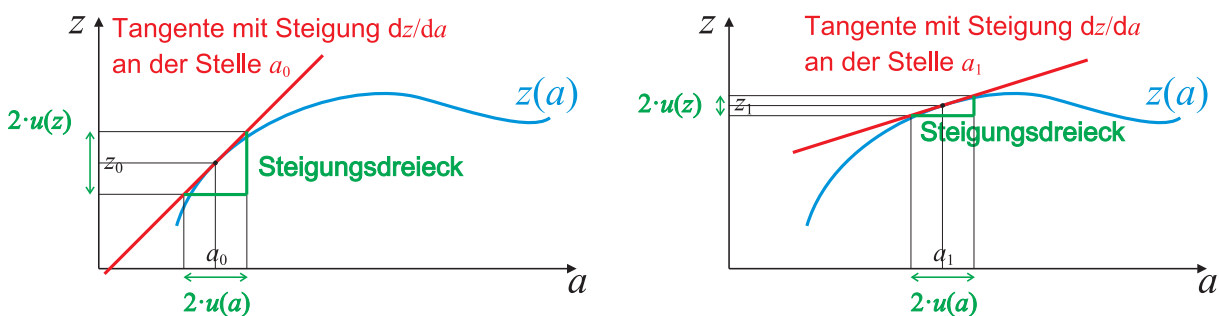


Abbildung C.1.6.: Zur Erklärung der Nutzung der Ableitung bei der Berechnung der kombinierten Messunsicherheit über die Tangente an die Funktion. Gezeichnet sind die Tangenten und Steigungsdreiecke an den beiden Stellen a_0 (linkes Diagramm) und a_1 (rechtes Diagramm).

C.1.9.1.1. Beispiel Kugelvolumen

Betrachten wir das Volumen einer Kugel. Die Masse lässt sich dann berechnen als

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \quad .$$

Die Ableitung lautet

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi \cdot r^2$$

und für die kombinierte Unsicherheit ergibt sich somit

$$\begin{aligned} u_c(V) &= \frac{dV}{dr} \cdot u(r) \\ &= 4\pi r^2 \cdot u(r) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.1.15})$$

C.1.9.2. Funktionen mehrerer Variablen

Die gerade für Funktionen einer Variable beschriebene Vorgehensweise lässt sich auf Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinern.

Bildet man aus den Größen a, b, c, \dots eine neue Größe $z = f(a, b, c, \dots)$, so lassen sich die Kenngrößen der Verteilung der Größe z aus den Kenngrößen der Verteilungen der Größen a, b, c, \dots berechnen. Der Wert von z ergibt sich dabei einfach als der Funktionswert. Für die Standardunsicherheit gilt das sog. Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz:

Ist die Größe

$$z(a, b, c, \dots)$$

eine beliebige Funktion mehrerer unabhängiger Größen

$$a, b, c, \dots$$

mit den zugehörigen Standardunsicherheiten

$$u(a), u(b), u(c), \dots \quad ,$$

so ist die kombinierte Standardunsicherheit von z

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c} \cdot u(c)\right)^2 + \dots \quad .} \quad (\text{C.1.16})$$

Das Symbol $\frac{\partial z}{\partial a}$ bedeutet dabei die partielle Ableitung der Funktion f nach der Variablen a . Sie beschreibt die Steigung der Funktion $z(a, b, c, \dots)$ in Richtung der Variable a bei unveränderten Werten der anderen Variablen b, c, \dots . Zur Bildung der partiellen Ableitung nach einer bestimmten Variable betrachtet man also alle anderen Variablen als Konstanten. Es ist daher nicht schwieriger, eine partielle Ableitung zu bilden, als eine „normale“ Ableitung. Die partiellen Ableitungen werden jeweils an der Stelle (a_0, b_0, c_0, \dots) ausgewertet¹⁴, wobei a_0, b_0, c_0, \dots die für die Größen a, b, c, \dots bestimmten „besten“ Werte sind. Der erhaltene Ableitungswert $\frac{\partial z}{\partial a}(a_0, b_0, c_0, \dots)$ wird auch als Empfindlichkeitskoeffizient von z bezüglich a bezeichnet, weil er angibt, wie „empfindlich“ z auf Änderungen von a reagiert, während die anderen Variablen konstant bleiben.¹⁵ Abbildung C.1.7 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

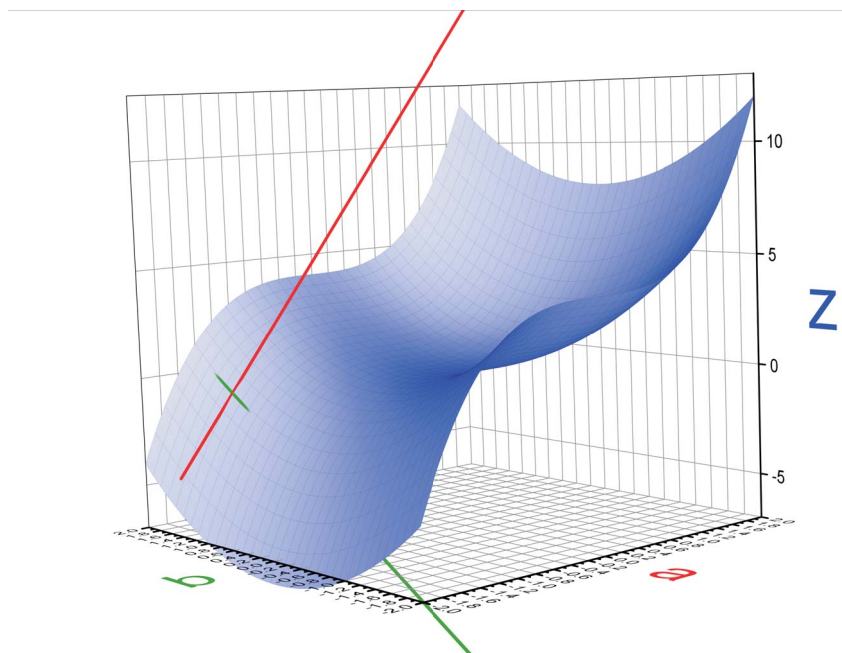


Abbildung C.1.7.: Zur Erklärung der Nutzung der partiellen Ableitung bei der Berechnung der kombinierten Messunsicherheit über die Tangente an eine mehrdimensionale Funktion.

C.1.9.2.1. Beispiel Quadermasse

Betrachten wir die Masse eines homogenen Quaders mit den Kantenlängen a , b und c sowie der Dichte ρ . Die Masse lässt sich dann berechnen als

$$m(a, b, c, \rho) = a \cdot b \cdot c \cdot \rho \quad .$$

¹⁴Das heißt, dass diese Werte in den beim Ableiten erhaltenen Ausdruck eingesetzt werden.

¹⁵Für die anderen Größen gilt das entsprechend.

Die partiellen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial a} &= b \cdot c \cdot \varrho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial b} &= a \cdot c \cdot \varrho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial c} &= a \cdot b \cdot \varrho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial \varrho} &= a \cdot b \cdot c \quad .\end{aligned}$$

Für die kombinierte Unsicherheit ergibt sich somit

$$\begin{aligned}u_c(m) &= \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial c} \cdot u(c)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial \varrho} \cdot u(\varrho)\right)^2} \\ &= \sqrt{(bc\varrho \cdot u(a))^2 + (ac\varrho \cdot u(b))^2 + (ab\varrho \cdot u(c))^2 + (abc \cdot u(\varrho))^2} \quad .\end{aligned}$$

C.1.9.2.2. Beispiel Zylindermasse

Betrachten wir die Masse eines homogenen Zylinders mit dem Radius r , der Höhe h und der Dichte ϱ . Die Masse lässt sich dann berechnen als

$$m(r, h, \varrho) = \pi r^2 \cdot h \cdot \varrho \quad .$$

Die partiellen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial r} &= 2\pi r \cdot h \cdot \varrho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial h} &= \pi r^2 \cdot \varrho \quad , \\ \frac{\partial m}{\partial \varrho} &= \pi r^2 \cdot h \quad .\end{aligned}$$

Für die kombinierte Unsicherheit ergibt sich somit

$$\begin{aligned}u_c(m) &= \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial r} \cdot u(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial h} \cdot u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial \varrho} \cdot u(\varrho)\right)^2} \\ &= \sqrt{(2\pi r h \varrho \cdot u(r))^2 + (\pi r^2 \varrho \cdot u(h))^2 + (\pi r^2 h \cdot u(\varrho))^2} \quad .\end{aligned}$$

— Ende Teil 3 —

Literaturverzeichnis

- [BS85] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 22. Auflage, 1985.
- [Bun11] BUNDESANSTALT, PHYSIKALISCH-TECHNISCHE (Herausgeber): *Auswertung von Messdaten – Eine Einführung zum „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ (GUM) und zu den dazugehörigen Dokumenten*, https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_8/8.4_mathematische_modellierung/8.40/JCGM_104_2009_DE_2011-03-30.pdf. PTB, Berlin, 1. Auflage, 2011.
- [fGiMJ10] METROLOGY (JCGM), JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN: *Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. 2010.
- [fNB95] NORMUNG E. V., DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR (Herausgeber): *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen – Deutsche Übersetzung des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“*. Beuth Verlag GmbH, Berlin · Wien · Zürich, 1. Auflage, 1995.
- [fNB99] NORMUNG E. V., DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR (Herausgeber): *DIN V ENV 13005:1999-06, Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen – Deutsche Übersetzung des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“*. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1. Auflage, 1999.
- [Gla71a] GLAISHER, J. W. L.: *On a class of definite integrals*. Phil. Mag. Ser. 4, 42:294–302, 1871.
- [Gla71b] GLAISHER, J. W. L.: *On a class of definite integrals – Part II*. Phil. Mag. Ser. 4, 42:421–436, 1871.
- [Ham23] HAMMER, E.: *Lehr- und Handbuch der ebenen und spärischen Geometrie*. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1923.
- [Kis95] KISTERMANN, FRIEDRICH WILHELM: *Die Rechentechnik um 1600 und Wilhelm Schickards Rechenmaschine*. In: SECK, FRIEDRICH (Herausgeber): *Zum 400. Geburtstag von Wilhelm Schickard – Zweites Tübinger Schickard-Symposium 25. bis 27. Juni 1992*, Seiten 241–272, 1995.
- [Tay88] TAYLOR, JOHN R.: *Fehleranalyse - Eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, 6940 Weinheim, Bundesrepublik Deutschland, 1. Auflage, 1988.
- [Tay97] TAYLOR, JOHN R.: *An Introduction to Error Analysis - The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. University Science Books, 55D Gate Five Road, Sausalito, CA 94965, USA, 2. Auflage, 1997.