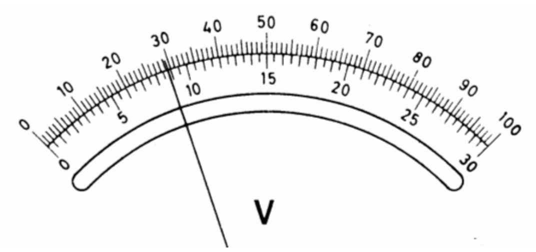
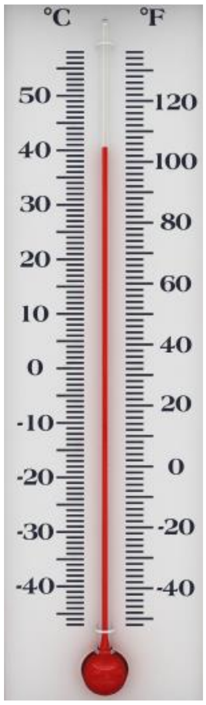
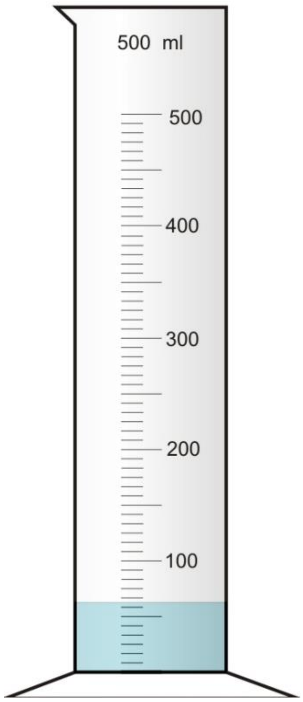
Messunsicherheitsanalyse Tag 1

1 Regeln zur Angabe und Verwendung

> Regel Nr. 1: Angabe von Messwerten
>
> Messwert x und zugehörige Unsicherheit $u(x)$ werden häufig in folgender Form angegeben: $x \pm u(x)$
>
> Hinweis: Sowohl der Wert x als auch die Unsicherheit $u(x)$ umfassen jeweils einen Zahlenwert und die Einheit.

1.1 Schätzen von Unsicherheiten

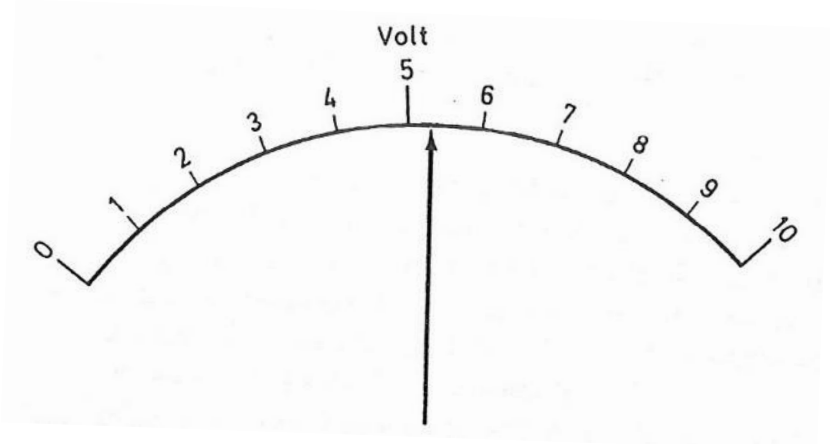
1. Ablesen von Skalen:
   Lesen Sie die folgenden Messgrößen so gut ab wie möglich und geben Sie sie korrekt an!

 [1] Eingestellter Messbereich 10 V $U =$______________________	 [2] $T =$______________	 [3] $V =$______________

> Messwerte werden durch das Ablesen von Skalen, bei denen die Teilstriche nahe beieinander liegen, ermittelt. Dabei legt man eine Dreiecksverteilung zugrunde. Die Breite der Verteilung ist dann 1 Teilstrich.
>
> Die zugehörige Messunsicherheit ist gegeben durch
>
> $$u = \frac{1\ \text{Teilstrich}}{2\sqrt{6}}\ .$$

2. Interpolation:
   Geben Sie den Messwert so genau wie möglich an!

   Bei dieser Skala müssen Sie interpolieren, also die genaue Lage des Messwerts zwischen den Teilstrichen abschätzen.



[1]

$U =$ ____________________________________

3. Wiederholbare Messungen:
   Holen Sie sich eine Schnur und eine Masse und verwenden Sie z. B. Ihr Mobiltelefon als Stoppuhr. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer des Pendels bei einer Schwingung. Führen Sie zunächst nur eine Schwingung aus und geben Sie die Periodendauer und eine Schätzung der Messunsicherheit an. Begründen Sie Ihre Schätzung der Messunsicherheit!

   $T =$ ____________________________________

   Begründung für $u(T)$: ____________________________________

   ____

   Wiederholen Sie diese Messung weitere vier Mal und geben Sie den Bestwert ihrer Messung mit Unsicherheit an!

T in s					

   $T_{\text{best}} =$ ____________________________________

   Begründung für $u(T)$: ____________________________________

   ____

> Durch wiederholtes Messen erhält man Information über die Streuung der Messwerte und damit über die Messunsicherheit.
>
> Da geschätzte Unsicherheiten sehr subjektiv sind, muss ihre Angabe stets gerechtfertigt werden!

1.2 Wiedergabe und Verwendung von Messunsicherheiten

Regel Nr. 2: Signifikante Stellen
Messunsicherheiten von Endergebnissen werden üblicherweise auf 2 signifikante Stellen gerundet angegeben. Unsicherheiten werden dabei immer aufgerundet.
Der Messwert wird ebenfalls gerundet. Dabei hat die letzte signifikante Stelle des Messwerts die gleiche Wertigkeit wie die letzte signifikante Stelle der Unsicherheit. Der Messwert wird dabei abhängig von der folgenden Ziffer auf- oder abgerundet (4/5-Rundung).
Bei Zwischenergebnissen empfiehlt sich die Angabe von mindestens 3 signifikanten Stellen, um das Ansammeln von Rundungsfehlern zu verringern.

Geben Sie die folgenden Messergebnisse korrekt an (vgl. auch Regel 1):

$a = (9{,}82 \pm 0{,}02385)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
$Q = (0{,}1562 \cdot 10^{-15} \pm 689{,}76 \cdot 10^{-19})\ \mathrm{C}$
$v = (199\ 798\ 673{,}67 \pm 7\ 245{,}981\ 32)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$\lambda = (885{,}589 \cdot 10^{-11} \pm 0{,}004\ 985 \cdot 10^{-8})\ \mathrm{m}$
$U = 1{,}81\ \mathrm{kV},\ \ u(U) = 1693\ \mathrm{mV}$
$E = 9{,}387\ \mathrm{eV},\ u(E) = 39{,}782 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}$

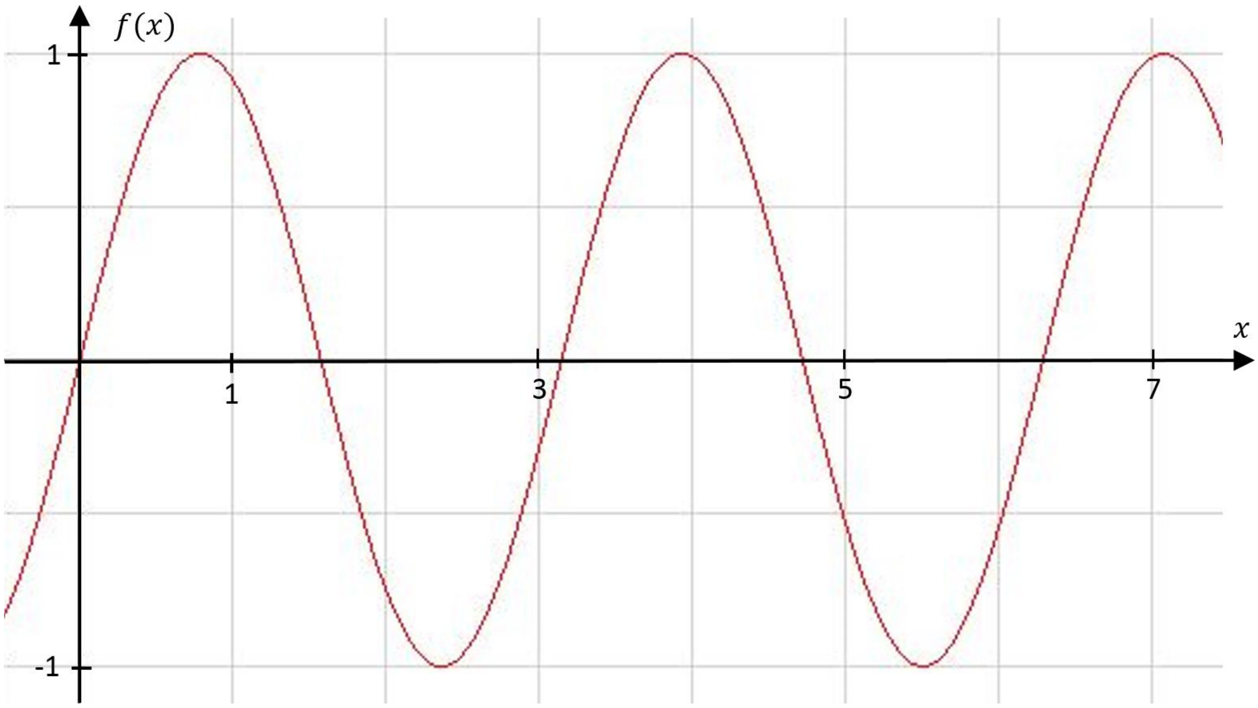
1.3 Kombinieren von Messunsicherheiten bei beliebigen Funktionen

1.3.1 Kombinierte Unsicherheit einer Funktion einer Variablen

Betrachten Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(2x)$.

Zeichnen Sie für jeden Wert x die linke und die rechte Seite des Intervalls als vertikale Linie in das Diagramm ein und bestimmen Sie so **zeichnerisch** das zugehörige Intervall von $f(x)$ zum zugehörigen Wert x. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die Tabelle ein.

x	$(1{,}00 \pm 0{,}20)$	$(1{,}50 \pm 0{,}20)$	$(2{,}40 \pm 0{,}20)$	$(5{,}20 \pm 0{,}20)$
$f(x)$				



Beobachtung:

Die kombinierte Unsicherheit der Funktion einer Messgröße ist abhängig von ________________

____.

> Regel Nr. 3: Kombinierte Unsicherheit einer Funktion einer Variablen
>
> Haben wir die Größen x mit der zugehörigen Unsicherheit $u(x)$ gemessen, und $q(x)$ ist die interessierende Größe, so gilt für die kombinierte Unsicherheit von q:
>
> $u(q) = \left|\frac{\partial q}{\partial x}|_x \cdot u(x)\right|$. *

* Dabei meint der vertikale Strich rechts neben der partiellen Ableitung das mathematische „ausgewertet an der Stelle x“.

1.3.2 Allgemeine Formel für das Kombinieren von Messunsicherheiten

> Regel Nr. 4: Kombinierte Unsicherheit einer Funktion mehrerer Variablen
>
> Haben wir die Größen $a, \dots, h$ mit den zugehörigen Unsicherheiten $u(a), \dots, u(h)$ gemessen und $q(a, \dots, h)$ ist die interessierende Größe, so gilt für die Unsicherheit: $u(q) \leq \left|\frac{\partial q}{\partial a}|_{a,\dots,h} \cdot u(a)\right| + \cdots + \left|\frac{\partial q}{\partial h}|_{a,\dots,h} \cdot u(h)\right|$.
>
> Sind die Unsicherheiten der Eingangsgrößen alle unabhängig und zufällig, so gilt (unter der Voraussetzung von Normalverteilungen):
>
> $$u(q) = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial a}|_{a,\dots,h} \cdot u(a)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial q}{\partial h}|_{a,\dots,h} \cdot u(h)\right)^2}.$$

Leiten Sie aus diesen allgemein gültigen Formeln einige Spezialfälle ab:

i) Kombinierte Unsicherheit einer Summe (einer Differenz) von unabhängigen zufälligen Größen.
Berechnen Sie für die Funktion $s(x, y) = x + y$ die kombinierte Unsicherheit, wenn die Messwerte x und y mit den Unsicherheiten $u(x)$ und $u(y)$ sind.

ii) Kombinierte Unsicherheit eines Produkts (eines Quotienten) von unabhängigen zufälligen Größen
Berechnen Sie für die Funktion $p(x, y) = x \cdot y$ die kombinierte Unsicherheit, wenn die Messwerte x und y mit den Unsicherheiten $u(x)$ und $u(y)$ gegeben sind.

Berechnen Sie die kombinierte Unsicherheit für die folgenden Funktionen und geben Sie das „Messergebnis" korrekt an! Achten Sie darauf, die Einheiten stets mitzuführen!

i) $v = v_0 + \frac{s}{t}$ mit $v_0 = (3{,}0 \pm 1{,}0)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, s = (4{,}0 \pm 2{,}0)\ \mathrm{m}, t = (2{,}00 \pm 0{,}50)\ \mathrm{s}$

ii) $F = G \cdot \sin(\alpha)$ mit $G = (40{,}0 \pm 5{,}0)\ \mathrm{N}, \alpha = (30{,}0 \pm 2{,}0)°$

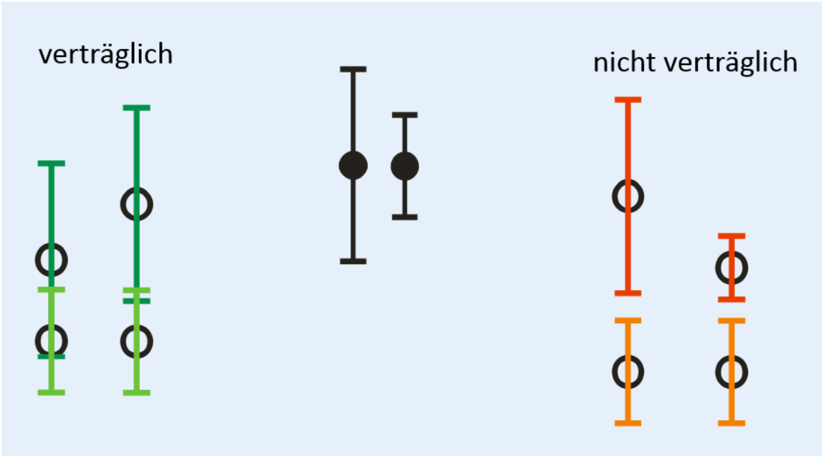
Überprüfen Sie Ihre Lösungen mit denen auf Seite 13!

Platz für Verbesserungen:

Erkenntnis zum Sonderfall trigonometrischer Funktionen:

1.4 Verträglichkeit von Messergebnissen

Eine in der Praxis häufig auftretende Fragestellung ist die nach der Verträglichkeit von zwei Ergebnissen. Im 1. Semester hatten wir hierzu die Überlappung der Unsicherheitsintervalle betrachtet und so eine ja/nein-Entscheidung erhalten:



Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen und ein quantitatives Maß für die Übereinstimmung von zwei Messwerten bestimmen. Dazu führt man in der Regel einen statistischen Test durch, der auch als Hypothesen- oder Signifikanztest bezeichnet wird. Einen solchen Test können Sie auch heranziehen, wenn in einem Versuch ein Wert experimentell bestimmt wurde, für den es einen Literaturwert gibt (z. B. Elementarladung e, Planck'sches Wirkungsquantum h).

1.4.1 Vorarbeit: Temperaturmessung

Um mit echten Messwerten arbeiten zu können, bestimmen Sie zunächst mit Hilfe eines Infrarotthermometers jeweils mehrfach die Temperatur verschiedener Oberflächen. Versuchen Sie dabei, möglichst reproduzierbar zu messen und wählen Sie **mindestens drei verschiedene Körperstellen** aus, von denen Sie vermuten, dass sie teilweise übereinstimmende und teilweise nicht übereinstimmende Temperaturen aufweisen (z. B. rechte Schläfe, linke Schläfe, Handoberseite, oder auch die Hände verschiedener Personen).

Tragen Sie alle Werte in der Einheit °C in die Tabelle ein und berechnen Sie jeweils den Mittelwert und seine Standardabweichung.

Messstelle	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Mittelwert**	**Stdabw. d. MW.**

1.4.2 Hypothesen- oder Signifikanztest

Der Signifikanztest erfolgt in mehreren Schritten, die hier beispielhaft durchgeführt werden sollen.

1. Wählen Sie sich zwei der Messwerte (Mittelwerte) aus der obenstehenden Tabelle aus. Geben Sie diese hier nochmals mit der zugehörigen Unsicherheit an:

   $\bar{x}_1 =$ ______________________________ $\bar{x}_2 =$ ______________________________

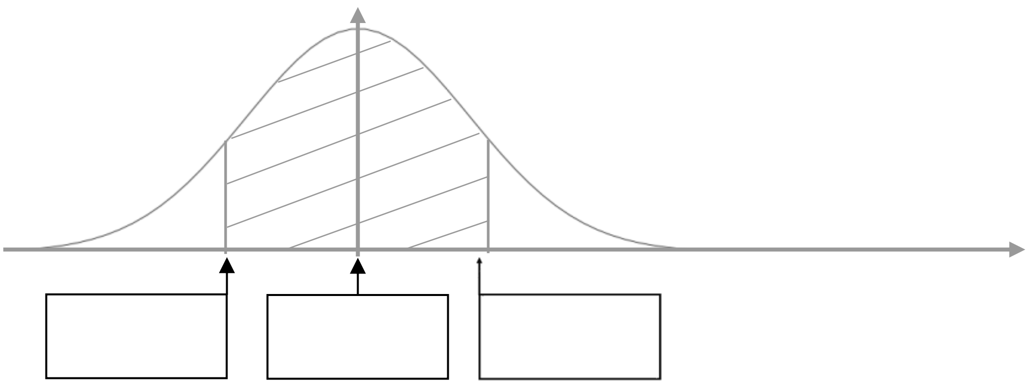
Nullhypothese: Die beiden Werte stimmen überein.

2. Berechnen Sie die Differenz d der Messwerte und die zugehörige kombinierte Messunsicherheit $u(d)$.

   $d =$ ______________________________ $u(d) =$ ______________________________

   $=$ ______________________________

3. Welche Differenz erwarten Sie unter Annahme der Nullhypothese? $d_{\text{erw}} =$ __________
4. Nehmen Sie nun $u(d) := \sigma$ als Unsicherheit der erwarteten Differenz an.
   Beschriften Sie das folgende Diagramm so, dass es der konstruierten Situation entspricht und zeichnen Sie d als vertikale Linie ein.



5. Wie viele Standardabweichungen σ weicht d von d_{erw} ab?

   $t =$ ____

   Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis maximal t Standardabweichungen von d_{erw} entfernt ist, wird berechnet über das *normale Fehlerintegral*

   $$P(\text{innerhalb von } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-x^2/2} \mathrm{d}\, x.$$

   Das Integral ist in Abb. 1 als Funktion von t dargestellt.

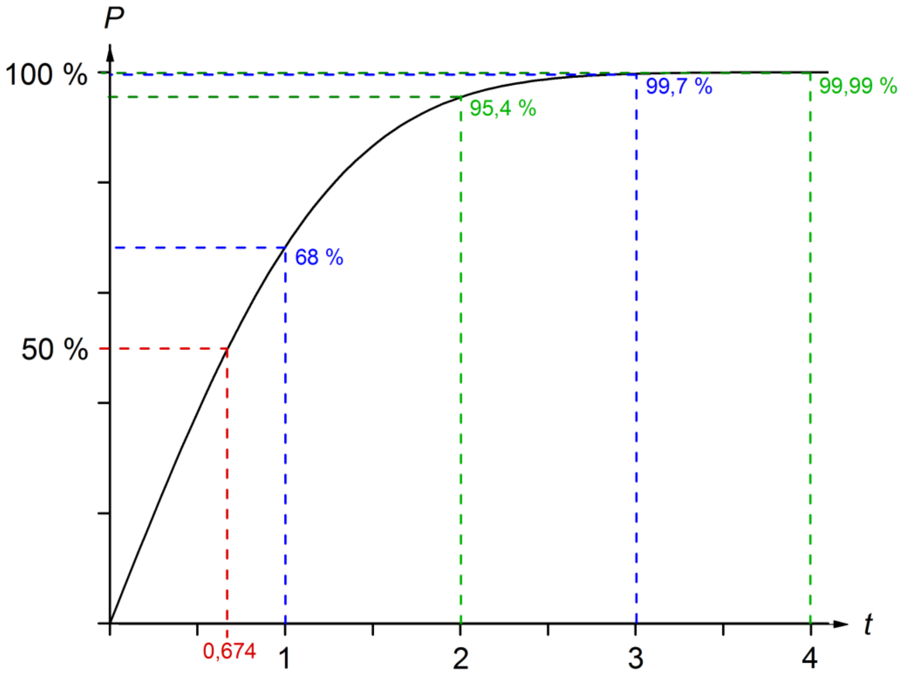


Abbildung 1: Normales Fehlerintegral als Funktion von *t*

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeit $P(\text{innerhalb } t\sigma)$

t	P in %
0,674	**50**
1,0	**68,27**
1,1	72,87
1,2	76,99
1,3	80,64
1,4	83,85
1,5	86,64
1,6	89,04
1,7	91,09
1,8	92,81
1,9	94,26
2,0	**95,45**
2,1	96,43
2,2	97,22
2,3	97,86
2,4	98,36
2,5	98,76
2,6	99,07
2,7	99,31
2,8	99,49
2,9	99,63
3,0	**99,73**
3,5	99,95
4,0	**99,994**
4,5	99,9993
5,0	99,99994

6. Verwenden Sie nun die tabellarisch aufgeführten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Messwert im Bereich von maximal t Standardabweichungen vom Zentralwert der Normalverteilung entfernt ist und berechnen Sie hiermit die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Nullhypothese.

$P(\text{außerhalb } t\sigma) = 1 - P(\text{innerhalb } t\sigma) =$

$= \underline{\hspace{10cm}}$

$= \underline{\hspace{10cm}}$

Ergebnis: Die Messwerte stimmen mit ____________ % Wahrscheinlichkeit überein.

Hier muss man „etwas um die Ecke denken“:

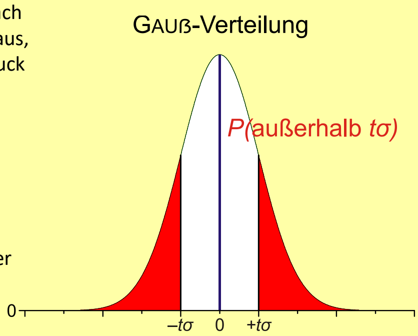
Wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Abweichung im beobachteten Umfang einfach zufällig entsteht, sehr groß ist, dann spricht das für die Nullhypothese. Denn diese sagt ja aus, dass die Werte übereinstimmen. Diese Wahrscheinlichkeit berechnet man mit dem Ausdruck

$$P(\text{außerhalb } t\sigma) = 1 - P(\text{innerhalb } t\sigma)$$

In der Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten für eine Normalverteilung innerhalb des Intervalls $[-t\sigma, +t\sigma]$ aufgeführt. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.

Also: Je kleiner das Verhältnis aus Abweichung und Unsicherheit ist, desto wahrscheinlicher ist eine zufällige Übereinstimmung und damit auch die Nullhypothese.

Umgekehrt gilt: Je größer das Verhältnis aus Abweichung und Unsicherheit ist, desto unwahrscheinlicher ist eine zufällige Übereinstimmung und damit auch die Nullhypothese.



1. Ist die Diskrepanz der Messergebnisse signifikant?

   ____

   ____

   ____

Grundsätzlich ist die Grenze zwischen nicht signifikanter und signifikanter Abweichung verschiedener Werte Ansichtssache. Häufig werden jedoch alle Wahrscheinlichkeiten unter 5% als unvernünftig klein betrachtet.
Das heißt: ist die Wahrscheinlichkeit für die Vereinbarkeit kleiner als 5%, so bezeichnen wir die Diskrepanz als signifikant und sprechen von „nicht verträglichen“ Messwerten.

Notizen/ Erkenntnisse: ____

____

____

____

____

____

____

____

1.4.3 verbesserte Testverfahren

Die Details würden zwar den Rahmen dieses Praktikumsversuchs sprengen, es soll dennoch nicht gänzlich unerwähnt bleiben, dass das hier beschriebene Testverfahren noch weiter verbessert werden kann. Z. B. ist es so, dass die Voraussetzung einer Normalverteilung bei kleinen Stichproben nicht mehr erfüllt ist, auch wenn die Grundgesamtheit selbst normalverteilt ist. Diese Erkenntnis führt zur sog. Student’schen t-Verteilung [4, 5] und den darauf aufbauenden Signifikanztests, die üblicherweise als t-Tests bezeichnet werden. Von diesen gibt es wiederum verschiedene Varianten, z. B. abhängig davon, ob zwei Messreihen mit gleichen oder mit verschiedenen Varianzen verglichen werden. Ein recht vielfältig einsetzbarer Test ist dabei der vom britischen Mathematiker Bernard Lewis Welch entwickelte Welch-Test [6].

1.4.4 Übung

Wiederholen Sie die Berechnungen des Signifikanztests für andere Kombinationen der von Ihnen gemessenen Temperaturwerte. Geben Sie jeweils an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Werte miteinander vereinbar sind und ob sie sich signifikant unterscheiden.

2 Problemstellungen aus der Praxis: Regressionen

2.1 Lineare Regression

Im Folgenden soll eine lineare Regression für die $U(I)$-Kennlinie eines Widerstands an einem handbetriebenen Dynamo oder die $F(a)$-Kennlinie eines Wagens berechnet werden. Dabei soll mit dem Programm Origin gearbeitet werden. Um nachvollziehen zu können, was das Programm mit Ihren Messdaten anstellt, werden Sie parallel auch eigene Berechnungen mit Excel durchführen.

A Analyse mit Origin

1. Führen Sie zusammen mit ihrem Partner eine der beiden Messungen durch und ziehen Sie sich die Daten auf einen USB-Stick, um den Messplatz wieder freizugeben.
2. Optional: Importieren Sie die Daten (auf einem anderen PC oder Ihrem Laptop) in Excel und sorgen Sie für eine anschauliche Darstellung.
3. Importieren Sie die Daten in Origin, erstellen Sie ein Punktdiagramm und führen Sie über die Hauptmenüfunktion „Analyse" einen linearen Fit aus.
4. Notieren Sie hier das Ergebnis (achten Sie auf eine korrekte Angabe nach Regel 1):

> Beachten Sie, dass Excel je nach Systemeinstellungen evtl. mit dem Komma als Dezimaltrennzeichnen arbeitet. Verwenden Sie in diesem Fall in der *.txt Datei die Funktion „Suchen und ersetzen".

____

____

B Interpretation

Wie berechnet Origin die angegebenen Unsicherheiten der Regressionsparameter, auch ohne dass Sie eine Abschätzung der Unsicherheiten für die Messwerte angeben haben?

5. Die Anpassung von Daten an eine Gerade geschieht nach der Methode der kleinsten Quadrate.

> Methode der kleinsten Abweichungsquadrate:
> Sei $\boldsymbol{f} = \big(f(x_1, \boldsymbol{\alpha}), \dots, f(x_n, \boldsymbol{\alpha})\big) \epsilon\, \mathbb{R}^n$ die Modellfunktion mit dem Parametervektor $\boldsymbol{\alpha} \,\epsilon\, \mathbb{R}^m$, die an die Daten $(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, n$ angepasst werden soll.
> Dabei geschieht die Anpassung so, dass die Abweichungsquadrate minimiert werden:
> $$\min \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i, \boldsymbol{\alpha})\big)^2$$

Geben Sie für die Modellfunktion $f(x_i, \boldsymbol{\alpha}) = A + Bx_i$ mit $\boldsymbol{\alpha} = (A, B)$ die passende Minimierungsfunktion für die lineare Regression an:

____

6. Bestimmung der Koeffizienten:
Anschließend wird die Minimierungsfunktion jeweils partiell nach A und B abgeleitet. Die Nullstelle der jeweiligen Ableitung liefert A und B. Man erhält
$$A = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{\Delta} \quad \text{und} \quad B = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\Delta} \quad \text{mit } \Delta = n(\sum {x_i}^2) - (\sum x_i)^2.$$

Aber was gilt für die Unsicherheiten?
Dazu nehmen wir an, dass <u>nur</u> die abhängige Größe y unsicherheitsbehaftet ist.

Diese Annahme ist vernünftig, da meist die Unsicherheit der abhängigen Messgröße y viel größer ist als die der unabhängigen Größe x.

7. Unsicherheit der Messwerte y_i:
   Es wird angenommen, dass jeder Messwert y_i um den Zentralwert $A + B \cdot x_i$ normalverteilt ist mit dem Breiteparameter $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (A + Bx_i))^2}$. Der Vorfaktor $\frac{1}{n-2}$ ist vernünftig, da für nur zwei Messwerte ____

   ____.

   Berechnen Sie σ_y für Ihre Messwerte! $\sigma_y =$ ______________________________________

8. Unsicherheit der Konstanten A und B:

$$u(A)^2 = \frac{\sigma_y^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\Delta} \text{ und } u(B)^2 = \frac{n \cdot \sigma_y^2}{\Delta}$$

   Überprüfen Sie diese Formeln für den Fall, dass zwei Messpunkte vorliegen!
   Tipp: Verwenden Sie Regel 5b für unabhängige Eingangsgrößen und beachten Sie, dass das Δ in $u(A)^2$ und $u(B)^2$ nicht quadratisch vorkommt!

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   Berechnen Sie die Unsicherheiten Ihrer Konstanten A und B mit einer Tabellenkalkulation!

   $u(A) =$ ______________________________ $u(B) =$ ______________________________

2.2 Trigonometrische Regression

Verwenden Sie die vorgefertigten Dateien mit der Aufnahme des überlagerten Tons von zwei Stimmgabeln. Speichern Sie die Daten auf einem USB-Stick und werten Sie sie mit dem Programm Origin aus. Notieren Sie hier Ihre Ergebnisse:

____

____

____

3 Literaturverzeichnis

[1] Taylor, John R.: *Fehleranalyse - Eine Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in physikalischen Messungen.* VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 1. Auflage, 1988.

[2] online unter: http://ipcblog.org/wp-content/uploads/2010/08/thermometer1.jpg
Stand: 22.02.2015

[3] online unter: http://www.uni-muenster.de/GeoPalaeontologie/Geologie/Angewandte/HLL_Darcy_Bilder/Messbehaelter.jpg
Stand 22.02.2015

[4] Student: *The Probable Error of a Mean*, Biometrika, **6** (1): 1–25, 1908

[5] Zabell, S. L.: *On Student's 1908 Article „The Probable Error of a Mean"*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 103, No. 481, S. 1-7, 2008

[6] Welch, B. L.: *The generalization of „Student's" problem when several different population variances are involved*, Biometrika, **34** (1–2): 28–35, 1947.

Lösungen zur Aufgabe auf Seite 6

i) $v = (5{,}0 \pm 1{,}5)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ii) $F = (20{,}0 \pm 2{,}8)\ \mathrm{N}$

Sollte Ihr Ergebnis hier nicht stimmen, so schauen Sie sich nochmals genau die Einheiten ihrer partiellen Ableitungen an, jeder Summand muss die Einheit der zu berechnenden Größe haben!

Nur lesen, wenn Sie dringend noch mehr Tipps benötigen!:

Winkel können auch im Bogenmaß in der Einheit $1\ \mathrm{Radiant} = 1\ \mathrm{rad} = 1$ ausgedrückt werden. Da diese Einheit dimensionslos ist, wird sie meist gar nicht geschrieben.

Umrechnung über $\varphi_{\mathrm{Bogenmaß}} = \varphi_{\mathrm{Gradmaß}} \cdot \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{360°}$.

Notizen