3.4 Kreisel und Trägheitsmoment @home

Zusatzmaterial (bitte zuhause bereitlegen):

- Besenstiel (ohne Besen) oder anderer länglicher Gegenstand, der an einem Ende „schwingend“ aufgehängt werden kann
  Hinweis: Günstig ist ein Querloch nahe am Ende des Stabes, das ist bei Besenstielen recht häufig. Alternativ kann man aber auch eine Schnur mit Klebeband befestigen.
- Schnur zum Aufhängen des Besenstiels
- Maßband/Gliedermaßstab („Zollstock“, „Meterstab“) oder Lineal
- Waage (für den Besenstiel, z. B. Küchenwaage)
  Hinweis: Falls Sie gar keine Waage zur Verfügung haben sollten, können Sie als annähernd zylindrischen Körper auch eine PET-Flasche nehmen, bei der die Gesamtmasse im Wesentlichen durch den Inhalt (Wasser) bestimmt ist. Besonders gut geeignet sind die einfachen 1,5 L-Wasserflaschen, die bei Nennfüllvolumen meist gerade bis zum oberen Ende des annähernd zylindrischen Teils gefüllt sind.
- Stoppuhr mit einer Schrittweite von $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$ oder kleiner (zur Not geht auch $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$), z. B. in Form eines Smartphones

Hard- und Software-Voraussetzungen:

- Computer (Windows/macOS/Linux)
- Java
  - Muss z. B. von `https://www.java.com/de/download/` installiert werden.[7]
  - Java ist *nicht* das Gleiche wie JavaScript! Es läuft auch nicht unter Android oder iOS/iPadOS.
- Dieses virtuelle Experiment läuft *nicht* im Web-Browser.

Unter den folgenden Links finden Sie die Java-Simulation eines Kreisels:

- notwendig:
  - Java-Programm zum Download unter
    `http://butikov.faculty.ifmo.ru/Applets/Gyroscope.jar`
- eher nur etwas für besonders interessierte Studierende:
  - Webseite mit Erklärungen
    `http://butikov.faculty.ifmo.ru/Applets/Gyroscope.html`
  - sehr ausführlicher Artikel
    `http://butikov.faculty.ifmo.ru/Applets/Gyroscope.pdf`

[7] Es kann unter Windows gelegentlich vorkommen, dass Java zwar vollständig installiert ist, dass Dateien mit der Dateierweiterung `.jar` aber trotzdem nicht automatisch mit Java geöffnet werden. Dieses Problem kann u. U. durch das Hilfsprogramm `Jarfix` behoben werden, das die Zuordnung von Java-Dateien wieder herstellt. Sie sollten das allerdings nicht machen, wenn Sie wissen, dass Sie die Datei-Erweiterung `.jar` normalerweise absichtlich mit einem anderen Programm öffnen.
Falls Sie `Jarfix` verwenden wollen, finden Sie es z. B. unter folgenden Adressen:

- `https://jarfix.de.softonic.com/`
- `https://www.softpedia.com/get/Others/Miscellaneous/Jarfix.shtml`
- `https://www.heise.de/download/product/jarfix-41657`

3.4.1 Grundlagen

Da Rotationsbewegungen von grundlegender Bedeutung in der Physik sind, finden sich in jedem allgemeinen Lehrbuch entsprechende Kapitel, in denen das Trägheitsmoment und Kreiselphänomene behandelt werden (online kostenlos im Netz der Uni Konstanz verfügbar sind z. B. Bergmann-Schaefer unter `https://www.degruyter.com/viewbooktoc/product/39457` oder Gerthsen unter `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-45977-5` — für den Zugriff von zuhause aus VPN nutzen, Informationen zu VPN unter `https://www.kim.uni-konstanz.de/e-mail-und-internet/vpn/`).

3.4.1.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment Θ eines Körpers bei Rotation um eine bestimmte Drehachse ist im allgemeinen Fall gegeben durch das Volumenintegral

$$\Theta = \int_V r_\perp^2 \cdot \varrho(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}V \tag{3.33}$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \text{Ortsvektor eines Punktes} \\ r_\perp &= \text{Abstand des Punktes von der Drehachse} \\ \varrho(\vec{r}) &= \text{Massendichte am Ort des Punktes} \end{aligned}$$

Für Spezialfälle kann dieses Integral relativ einfach berechnet werden.[8] Man erhält so z. B. für die Rotation eines homogenen Vollzylinders um eine Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Zylinderachse liegt, das Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{Zylinder,Mitte}} = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + \frac{1}{4} m \cdot r^2 \tag{3.34}$$

mit

$$\begin{aligned} m &= \text{Gesamtmasse des Zylinders} \\ l &= \text{Länge des Zylinders} \\ r &= \text{Radius des Zylinders} \end{aligned}$$

und daher für einen dünnen homogenen Stab, bei dem der Radius gegenüber der Länge vernachlässigt werden kann, näherungsweise

$$\Theta_{\text{Stab,Mitte}} = \frac{1}{12} m \cdot l^2 \tag{3.35}$$

mit

$$\begin{aligned} m &= \text{Gesamtmasse des dünnen Stabes} \\ l &= \text{Länge des Stabes} \end{aligned}$$

[8] Viele Formeln hierzu finden Sie z. B. unter `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Trägheitsmoment&oldid=199835234#Hauptträgheitsmomente_einfacher_geometrischer_Körper`.

3.4.1.1.1 Steiner'scher Satz

Das Trägheitsmoment ist nicht nur abhängig von der Richtung der Drehachse bezüglich des Körpers, sondern auch von der Lage der Achse zum Schwerpunkt. Geht die Achse nicht durch den Schwerpunkt, so ergibt sich ein höheres Trägheitsmoment. Das ist verständlich, denn die Masse ist dann ja im Mittel weiter von der Achse entfernt.
Für die Drehung um eine Achse, die vom Schwerpunkt den Abstand r_{Achse} besitzt, erhält man das Trägheitsmoment wie folgt:

$$\Theta_{\text{Achse}} = \Theta_{\text{Schwerpunkt}} + m \cdot r_{\text{Achse}}^2 \tag{3.36}$$

Für die Rotation eines dünnen Stabes um eine Achse am Stabende, die senkrecht zum Stab liegt, ergibt sich so das Gesamtträgheitsmoment

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{Stab,Ende}} &= \Theta_{\text{Stab,Mitte}} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} m \cdot l^2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

mit

$$\begin{aligned} m &= \text{Gesamtmasse des dünnen Stabes} \\ l &= \text{Länge des Stabes} \end{aligned}$$

3.4.1.2 Physikalisches Pendel

Die Schwingungsdauer eines Physikalischen Pendels kann bei hinreichend kleinen Auslenkungen unter Verwendung der Kleinwinkelnäherung $\sin(x) \approx x$ wie folgt berechnet werden:[9] [10] [11] [12]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot s}} \tag{3.40}$$

mit

$$\begin{aligned}\Theta &= \text{Trägheitsmoment des Pendels bei Drehung um den Aufhängepunkt}\\ m &= \text{Gesamtmasse des Pendels}\\ g &= \text{Erdbeschleunigung}\\ s &= \text{Abstand zwischen Aufhängepunkt und Schwerpunkt}\end{aligned}$$

3.4.1.3 Präzession

Für einen freien Kreisel ohne äußere Kräfte gilt, dass der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ des Kreisels erhalten bleibt. Liegt aber bei einem Kreisel der Schwerpunkt *nicht* vertikal über oder unter dem Aufhänge- bzw. Auflagepunkt, dann erfährt der Kreisel durch seine Gewichtskraft ein Drehmoment senkrecht zum Drehimpuls. Dieses führt dazu, dass die Richtung des Drehimpulsvektors (nicht sein Betrag L) sich ändert. Die Drehimpulsachse wandert dabei mit der sog. Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_P auf einem Kegelmantel „im Kreis herum“. Es gilt

$$\omega_\text{P} = \frac{m \cdot g \cdot r}{\Theta \cdot \omega} \tag{3.41}$$

[9] Achtung: Diese Formulierung gilt nur für die Zahlenwerte im Bogenmaß, nicht aber für die Zahlenwerte im Gradmaß.

[10] Es gilt darüber hinaus auch $\tan(x) \approx \sin(x) \approx x$.

[11] Nur der Vollständigkeit halber: Die exakte Lösung für die Schwingungsdauer eines Pendels auch bei großen Auslenkungswinkelamplituden α kann als Reihenentwicklung folgendermaßen dargestellt werden:

$$T(\alpha) = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot s}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \ldots\right] \tag{3.38}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot s}} \cdot \left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\prod_{n=1}^{m}\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \sin^{2m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\} \quad . \tag{3.39}$$

[12] Die Winkelamplitude muss dabei auch nicht „winzig“ sein, das Pendel darf schon gut sichtbar schwingen. Die relative Abweichung der Näherungslösung nach Gleichung (3.40) für die Schwingungsdauer eines Pendels von der exakten Lösung nach Gleichung (3.39) beträgt:

Schwingungsamplitude α	1°	2°	5°	10°	15°
relative Abweichung ca.	$1{,}9 \cdot 10^{-5}$ = 0,0019 %	$8 \cdot 10^{-5}$ = 0,008 %	$5 \cdot 10^{-4}$ = 0,05 %	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$ = 0,19 %	$4 \cdot 10^{-3}$ = 0,4 %

Schwingungsamplitude α	20°	30°	40°	60°	90°
relative Abweichung ca.	$8 \cdot 10^{-3}$ = 0,8 %	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$ = 1,7 %	$3 \cdot 10^{-2}$ = 3 %	$7 \cdot 10^{-2}$ = 7 %	$1{,}5 \cdot 10^{-1}$ = 15 %

mit

$$\begin{aligned} m &= \text{Masse des Kreisels,} \\ g &= \text{Erdbeschleunigung,} \\ r &= \text{Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt} \\ \Theta &= \text{Trägheitsmoment des Kreisels,} \\ \omega &= \text{Winkelgeschwindigkeit des Kreisels.} \end{aligned}$$

Interessanterweise ist die Präzessionswinkelgeschwindigkeit unabhängig vom Kippwinkel ϕ, den die Kreiselachse mit der Vertikalen bildet. Das ist so, weil bei größerem Kippwinkel zwar einerseits das Drehmoment größer wird, andererseits aber auch die vektorielle Änderung von $\vec{L}$ für eine bestimmte Drehung von $\vec{L}$ um die vertikale Achse um den gleichen Faktor größer wird. Die beiden Faktoren kürzen sich heraus, so dass ω_P letztlich völlig unabhängig von ϕ ist.

Bemerkung: Die Präzession lässt sich nur bei hinreichend schneller Rotation gut beobachten.

3.4.1.4 Nutation

Abhängig von den Anfangsbedingungen bewegt sich die Symmetrieachse des Kreisels nicht einfach auf einem Kegelmantel, sondern man beobachtet eine kompliziertere Überlagerung der Präzession mit einer anderen Bewegung, die Nutation genannt wird. Bei schnell rotierenden Kreiseln sieht die Nutation aus wie eine schnelle kleine Schaukelbewegung der Kreiselachse, bei langsamer rotierenden Kreiseln ist sie entsprechend stärker ausgeprägt. Die Nutation ändert *nicht* die Präzessionswinkelgeschwindigkeit, sondern ist eine zusätzliche periodische Bewegung. Durch geschickte Wahl der Anfangsbedingungen kann man die Nutation komplett vermeiden und dadurch die Präzessionsbewegung besser beobachten. Man spricht in diesem Fall von „regulärer Präzession". Bei Vorhandensein von Reibung wird die verhältnimäßig schnelle Nutationsbewegung besonders wirkungsvoll gedämpft, so dass eine Präzession mit Nutation nach einer gewissen Zeit „von allein" in eine Präzession ohne Nutation übergeht.

3.4.2 Versuchsdurchführung Teil 1: Realexperiment

- mit Besenstiel:
  - Bestimmen Sie die Masse m des Besenstiels.
  - Bestimmen Sie die Länge l des Besenstiels.
  - Bestimmen Sie den Durchmesser $2r$ des Besenstiels.
  - Hängen Sie den Besenstiel an einer sehr kurzen Schnur auf oder halten Sie ihn einfach nahe an einem Ende zwischen zwei Fingern fest und lassen Sie ihn locker schwingen. Notieren Sie, wie weit der Drehpunkt vom oberen Stielende entfernt ist.
  - Bestimmen Sie mehrfach die Zeit T_{10} für 10 Periodendauern der Pendelschwingung des Besenstiels.
- alternativ mit Wasserflasche (Beispielanordnung siehe Abbildung 3.1):
  - Bestimmen Sie die Masse m der Flasche. Falls Sie keine Waage zur Verfügung haben, gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Gesamtmasse durch das Wasser (z. B. 1,5 L) mit einer Dichte von $\varrho_\mathrm{Wasser} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ gegeben ist.
  - Hängen Sie die Flasche an einer kurzen Schnur auf.
  - Bestimmen Sie den Abstand des Aufhängepunkts vom oberen Ende der Wassersäule. Achtung: Je nach Befestigung der Schnur ist nicht unbedingt der oberste Punkt auch

der Drehpunkt. Bei der Anordnung in Abbildung 3.1 dreht sich das Pendel z. B. um die Mitte des Holzstabes, über dem die Schnur hängt. Der oberste Teil der Schnur liegt unbeweglich auf dem Stab. Das macht für die Auswertung einen Unterschied.

- Bestimmen Sie die Länge l der zylindrischen Wassersäule.
- Bestimmen Sie den Durchmesser $2r$ der Wassersäule.
- Bestimmen Sie mehrfach die Zeit T_{10} für 10 Periodendauern der Pendelschwingung der Wasserflasche.

Hinweis: Achten Sie in beiden Fällen darauf, dass die Winkelauslenkung nicht *zu* groß wird, damit in der Rechnung die Kleinwinkelnäherung $\sin(x) \approx x$ angewendet werden kann.

Abbildung 3.1: PET-Flasche als Physikalisches Pendel

3.4.3 Versuchsdurchführung Teil 2: Simulation der Kreiselbewegung

a) Belassen Sie den Wert für *Animation Delay* während des ganzen Versuchs auf 15 ms, um vergleichbare Zeiten zu messen.

b) Aktivieren Sie den Schalter *Regular precession*, um die Nutationsbewegung zu vermeiden.

c) Deaktivieren Sie den Schalter *Friction*, um einen reibungsfreien Kreisel zu simulieren.

d) *Tilt angle*: lassen Sie sich für die Messungen von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor einen Winkel im Bereich von 10° bis 120° zuteilen.

e) Messen Sie jeweils die Zeit für einen kompletten Präzessionsumlauf. Untersuchen Sie so die Abhängigkeit der Präzessionsfrequenz der simulierten Kreiselbewegung von

- dem Abstand des Schwerpunkts der Kreiselmasse vom Auflagepunkt
  - *Rotation speed*: 10,00
  - *Disc position*: 0,50; 0,75; 1,00; 1,25

- der Rotationswinkelgeschwindigkeit des Kreisels
  - *Rotation speed*: 4,00; 8,00; 12,00; 16,00; 20,00
  - *Disc position*: 1,00

  und
- dem Kippwinkel zwischen Kreiselachse und der Vertikalen
  - durch Vergleich mit den Messergebnissen Ihrer Kommilitoninnen und Kommilitonen.

f) Tauschen Sie sich nach Möglichkeit mit Ihren Kommilitoninnen und Kommilitonen über die Ergebnisse bei anderen Kippwinkeln aus.

g) Wenn noch Zeit ist:
Probieren Sie weitere Einstellungen der Simulation aus, insbesondere

- Präzession mit Nutation,
- Präzession/Nutation mit Reibung.

3.4.4 Auswertung

a) Realexperiment

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ nach Gleichung (3.40).

(b) Berechnen Sie aus den ermittelten Größen unter Verwendung des Steiner'schen Satzes (3.36) das Trägheitsmoment Θ_{SP} bei Drehung um eine Achse durch den Schwerpunkt.

(c) Vergleichen Sie quantitativ mit dem erwarteten Wert nach Gleichung (3.34).

b) Simulation

(a) Zeichnen Sie Diagramme der Präzessionswinkelfrequenz als Funktion

i. des Abstands des Schwerpunkts der Kreiselmasse vom Auflagepunkt (*Disc position*) und

ii. der Rotationswinkelgeschwindigkeit des Kreisels (*Rotation speed*).

(b) Konnten Sie die Unabhängigkeit der Präzessionsfrequenz vom Kippwinkel (*Tilt angle*) zusammen mit Ihren Kommilitoninnen und Kommilitonen bestätigen?

3.4.5 Zusätzliche Informationen

3.4.5.1 Magnetresonanztomographie

Die Magnetresonanztomographie oder auch Kernspintomographie ist ein bildgebendes Verfahren in der medizinischen Diagnostik, bei der die Präzessionsbewegung des Drehimpulses von Protonen (also Kernen von Wasserstoffatomen, die im menschlichen Körper in sehr großer Zahl vorhanden sind) in einem äußeren Magnetfeld beobachtet wird. Man macht da also quasi das Gleiche wie in diesem Versuch, nur dass man nicht einen einzelnen großen Kreisel betrachtet, sondern eine extrem große Anzahl extrem kleiner „Kreisel". Auf diese Weise können 3D-Aufnahmen aus dem Inneren des menschlichen Körpers erzeugt werden und das sogar völlig ohne

Röntgenstrahlung. Wer eine sehr anschauliche Beschreibung der Methode sucht, der wird bei „MRI made easy“ fündig.[13]

[13]Hans H. Schild, *MRI made easy*, deutsche und englische Fassung verfügbar, für AP-Teilnehmerinnen und -Teilnehmer am einfachsten auf dem AP-Server unter `https://ap.physik.uni-konstanz.de/AP-intern/Ressourcen/Literatur/MRI/` abrufbar. Dort finden sich pdf-Dateien, eBooks und auch eine animierte englische Version in Form eines CD-image (iso-Format). Auch in der Uni-Bibliothek stehen einige gedruckte deutsche Exemplare und eine CD mit der animierten englischen Version.